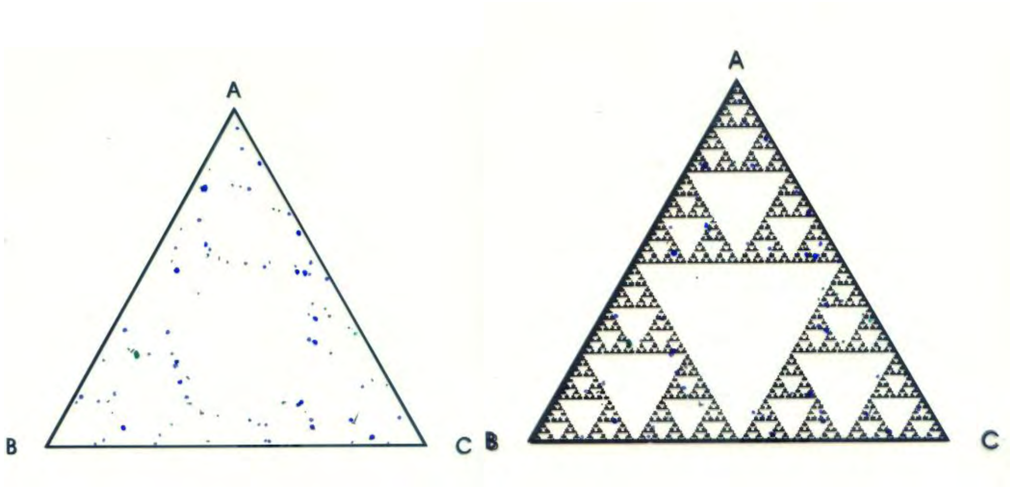
Γούναρη Βασιλεία

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ



Διδακτορική διατριβή που υποβάλλεται
στο καθηγητικό σώμα για τη μερική εκπλήρωση των υποχρεώσεων
απόκτησης του
διδακτορικού τίτλου του Παιδαγωγικού Τμήματος του Παν/μίου
Θεσσαλίας.

Βόλος
2017

Εγκεκριμένο από το καθηγητικό σώμα:

1ος Επιβλέπων: Χατζηκυριάκου Κώστας.

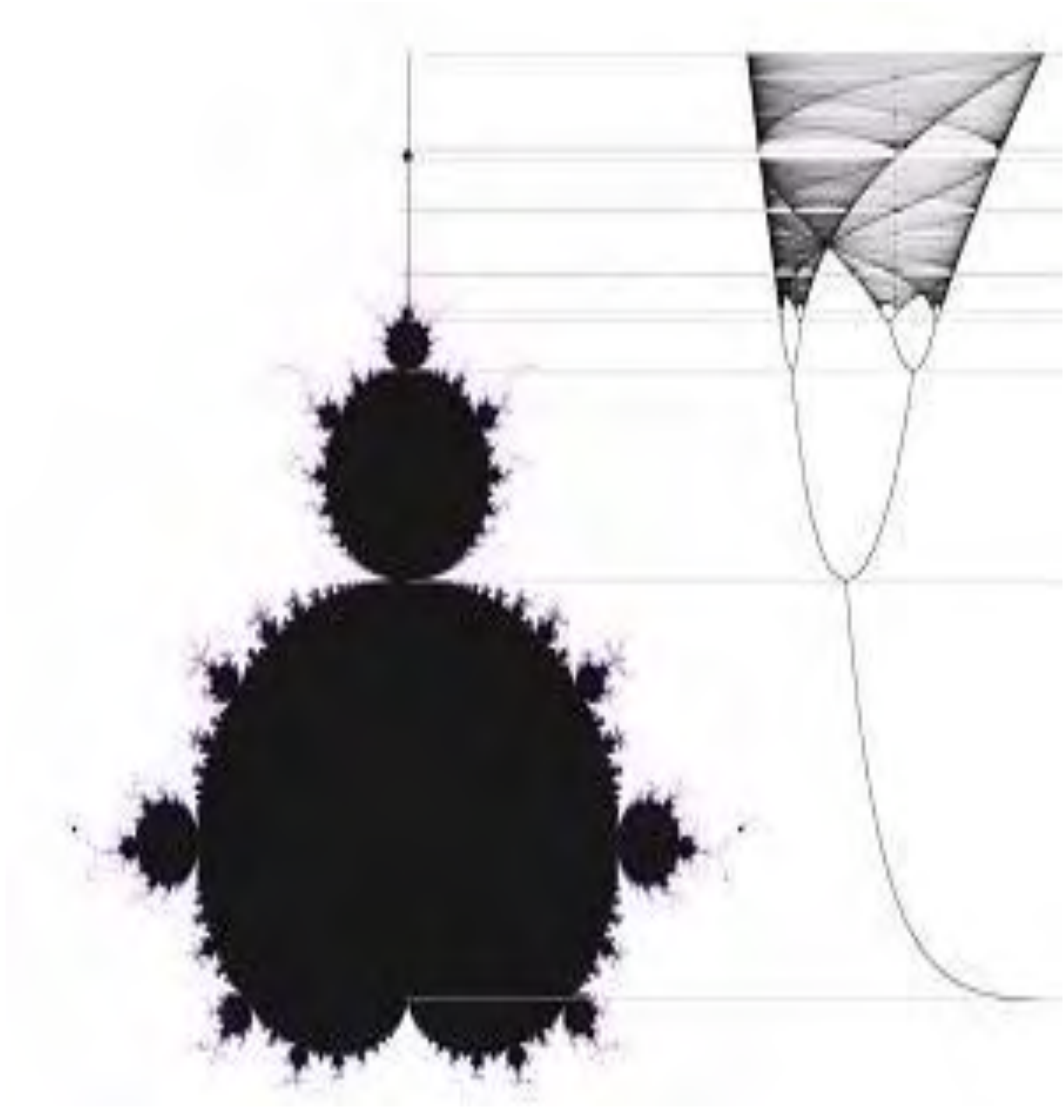
2η Επιβλέπουσα: Σταυρίδου Ελένη.

3ος Επιβλέπων: Χρηστίδης Θεόδωρος.

Στη μητέρα και στον πατέρα μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα



Mandelbrot Set και διάγραμμα Feigenbaum

Τριμελής συμβουλευτική επιτροπή

Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος, αναπληρωτής καθηγητής, Π. Τ. Δ. Ε πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Σταυρίδου Ελένη, διατελέσασα καθηγήτρια Π. Τ. Δ. Ε πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Χρηστίδης Θεόδωρος, ομότιμος καθηγητής Π. Τ. Δ. Ε πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος, αναπληρωτής καθηγητής Π. Τ. Δ. Ε πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Χρονάκη Άννα, καθηγήτρια Π. Τ. Π. Ε πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Βαβουγυιός Διονύσης, καθηγητής Π. Τ. Ε. Α. πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Σταθοπούλου Χαρίκλεια, καθηγήτρια Π. Τ. Ε. Α. πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Στους μαθητές πρώτα, μετά στους δασκάλους και καθηγητές των σχολείων των διδακτικών μας παρεμβάσεων, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για την ενθουσιώδη συνεργασία τους και τον χρόνο που αφιέρωσαν - παρά το φορτωμένο πρόγραμμα των σχολικών τους υποχρεώσεων - στην προσπάθειά μας.

Σε Ελλάδα και Γερμανία ευχαριστώ τα στελέχη εκπαίδευσης και τους πανεπιστημιακούς ερευνητές που συνεργάστηκαν μαζί μας και βοήθησαν στον τομέα τους τη διερεύνησή μας.

Τους πανεπιστημιακούς μου καθηγητές του Π. Τ. Δ. Ε. Θεσσαλίας ευχαριστώ για τη βοήθειά τους, ειδικά τους Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνο, Σταυρίδου Ελένη και Χρηστίδη Θεόδωρο ευχαριστώ για την έγκριση της εργασίας και τη διδακτική καθοδήγηση τους στα πρώτα κρίσιμα βήματα της προσπάθειας αυτής, όπως και για την υπομονή τους στα μακρά βήματα της συνέχειάς της.

Τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη, Χρονάκη Άννα, Βαβουγυιό Διονύση και Σταθοπούλου Χαρίκλεια, ευχαριστώ για την προθυμία τους να μελετήσουν και να κρίνουν την εργασία αυτή.

Τον καθηγητή μου και επιβλέποντα της εργασίας μου Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνο, ευχαριστώ για την επιστημονική του καθοδήγηση, την ετοιμότητα λύσεων και την ευελιξία που έδειξε σε κάθε στάδιο της έρευνάς μας, καθώς και για τη διαμόρφωση και διόρθωση της εργασίας αυτής.

Για την υπομονή που έδειξε στην καθυστέρηση της εργασίας, τις συμβουλές και τη συμπαράστασή του σε κάθε επαγγελματική αλλά κυρίως προσωπική μου μάχη κατά τη μακρά διάρκεια της διατριβής, όχι ως επιβλέπων αλλά ως μέντοράς μου, το ευχαριστώ είναι πολύ λίγο.

Περίληψη

Με την εργασία αυτή διερευνούμε αν μπορεί να ενταχθεί η διδασκαλία της μη γραμμικότητας στα μαθηματικά της Γενικής Εκπαίδευσης. Η ερευνητική μας υπόθεση είναι αυτό μπορεί να γίνει με κατάλληλες δραστηριότητες των οποίων το είδος, αλλά και εκπαιδευτική βαθμίδα εφαρμογής τους, θα προσδιοριστεί από την ίδια την ερευνητική δραστηριότητά μας.

Η διερεύνηση που διήρκησε από το 2004 έως και το 2009 πέρασε από τρία στάδια, στα οποία εφαρμόσαμε διαφορετικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις.

Στο πρώτο στάδιο (έτη 2004 και 2005) η αρχική έρευνα δράσης σε Ελλάδα και Γερμανία έδειξε τα όρια της ερευνητικής μας υπόθεσης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ανέδειξε όμως τη σημασία της πολιτισμικής παραμέτρου στη διδασκαλία της μη γραμμικότητας. Στη συνέχεια η έρευνα δράσης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα, έδειξε ότι η ερευνητική υπόθεσή μας μπορεί να επαληθευθεί, και μας οδήγησε να επιλέξουμε την Γ΄ Γυμνασίου ως την εκπαιδευτική βαθμίδα στην οποία θα εντάξουμε τη διδασκαλία της μη γραμμικότητας.

Με τον πυρήνα της διδακτικής παρέμβασης στη Γ΄ γυμνασίου επιβεβαιωμένο, η επιβαλλόμενη συνέχεια ήταν η πληρέστερη δυνατή διερεύνηση και ποιοτική ανάλυση των διδακτικών μας έργων, με έμφαση στον τρόπο σκέψης των μαθητών σχετικά με τους γνωστικούς στόχους που θέσαμε. Για τον λόγο αυτό ακολούθησε το 2006 σε δεύτερο στάδιο η σπουδή περίπτωσης σε ένα συγκεκριμένο Γυμνάσιο, η οποία (συμπεριλαμβανομένης και της διαθεματικής παραμέτρου) ανέδειξε το βασικό εργαλείο για τη μελέτη της ερευνητικής μας υπόθεσης: Διδακτική παρέμβαση στη Γ΄ γυμνασίου με ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες, που εκμεταλλεύονται το παιχνίδι του χάους, το τρίγωνο Sierpinski, τις προσομοιώσεις fractal σχημάτων και τη διάσταση αυτοομοιότητας Sierpinski.

Από το 2006 ως και το 2009 πραγματοποιήσαμε το τρίτο και τελικό στάδιο της διερεύνησής μας με μεθοδολογία του τύπου της θεμελιωμένης θεωρίας σε 15 γυμνάσια σε Θεσσαλονίκη και Βόλο. Με τη θεμελιωμένη θεωρία, η ποσοτική και ποιοτική ανάλυση -με συνεχή έλεγχο και ανατροφοδότηση- ανέδειξε την τελική μας πρόταση.

Η οριστική πρόταση στην οποία καταλήξαμε περιλαμβάνει πέντε διδακτικές δραστηριότητες σε δυο ημέρες από δυο ώρες διδασκαλίας στη Γ΄ γυμνασίου.

Επιδιώξαμε τέλος μετά την παρέμβαση σε ορισμένα γυμνάσια, διαθεματική γέφυρα με το παιχνίδι του χάους της παρέμβασης, με έναν συνδυασμό συνέντευξης και πειράματος μαγνητικού εκκρεμούς, γνωστό από προηγούμενες διδακτικές έρευνες της μη γραμμικότητας στη φυσική. Στην εργασία μας πιστεύουμε ότι υπάρχουν δυο καινοτομίες:

1. Το διδακτικό έργο στο παιχνίδι του χάους όπου οι μαθητές εργάζονται όχι με πληκτρολόγιο, αλλά με τα χέρια με χάρακα και ζαράκι, και διαπιστώνουν την απρόβλεπτη εξέλιξη του δυναμικού συστήματος αλλά τελικά και την εσωτερική τάξη σε όλες τις διαφάνειες της τάξης τους. Η δική τους διαφάνεια και το σύνολο των διαφανειών της τάξης στο διαφανειοσκόπιο, αντικαθιστούν την οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

2. Το διδακτικό έργο της διαπίστωσης και εύρεσης της άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski (και στη συνέχεια της γραμμής von Koch και Cantor) χωρίς τη χρήση λογαρίθμων, αλλά με τον συνδυασμό του λόγου αυτοομοιότητας και την προσέγγιση της άρρητης διάστασης με τη βοήθεια υπολογιστών τσέπης (μάλιστα με ακρίβεια 0,01 σε όλα τα γυμνάσια).

Η εκτενής διερεύνηση της εργασίας μας με μεικτή μεθοδολογία και ο σημαντικός όγκος δεδομένων, ενισχύουν την εγκυρότητα της αξιοποίησης της μη γραμμικότητας στη γενική εκπαίδευση. Η ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των τελευταίων ετών έδειξε την κάλυψη των γνωστικών μας στόχων σε ένα επίπεδο που δεν αναμέναμε στην αρχή της προσπάθειάς μας, και επιβεβαιώνει τη δυνατότητα διδακτικής αξιοποίησης της μη γραμμικότητας στη Γ΄ τάξη γυμνασίου, επαληθεύει δηλαδή την ερευνητική μας υπόθεση.

ΚΕΦ. Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας από τους σημαντικότερους Γερμανούς μαθηματικούς, ο Hermann Weyl, έλεγε: “Με την εργασία μου προσπαθώ να ενοποιήσω την αλήθεια με το ωραίο. Όταν όμως πρέπει να διαλέξω το ένα ή το άλλο, συνήθως επιλέγω το ωραίο” (www.britannica.com/biography/Hermann-Weyl).

Η φιλόδοξη προσπάθεια της εργασίας αυτής ήταν ακριβώς να φέρει την ομορφιά ακόμη πιο κοντά στην αλήθεια στη διδασκαλία των θετικών επιστημών. Δε μας ενδιέφερε όμως η αλήθεια της γραμμικής προσέγγισης. Η γνωστή, κλασική, γραμμική προσέγγιση που διδάσκονται οι μαθητές εδώ και δεκαετίες δεν είναι η μοναδική αλήθεια στις θετικές επιστήμες. Είναι ίσως η χθεσινή μοναδική αλήθεια. Εμάς μας ενδιέφερε η σχετικά άγνωστη, και για τους μαθητές πρωτόγνωρη, μη γραμμική προσέγγιση (Devaney, R. L. 2003, Peitgen, H. O., 1992, Driver R. 1985). Μια αλήθεια που αναδύθηκε πρόσφατα (Mandelbrot, B. B. 1983, Hartmut, J. 1989). Επιδιώξαμε τη διδακτική αξιοποίησή στη γενική εκπαίδευση, για να έχουν την ευκαιρία να έρθουν όλοι οι μαθητές σε επαφή με την ομορφιά και την αλήθεια της μη γραμμικότητας, όσο γίνεται νωρίτερα στην επιστημονική τους παιδεία.

Ο στόχος της εργασίας μας αποκρυσταλλώθηκε στη διερεύνηση της δυνατότητας διδακτικής αξιοποίησης εννοιών της μη γραμμικότητας στη γενική εκπαίδευση.

Δεν ήμασταν οι πρώτοι που επιδιώξαμε αυτή τη διερεύνηση. Σε πολλές χώρες, στις Η.Π.Α. αρχικά, στη Γερμανία, στην Αγγλία και στην Ελλάδα τα τελευταία χρόνια γίνονται όλο και περισσότερες παρόμοιες προσπάθειες διδασκαλίας μη γραμμικών προσεγγίσεων με ενθαρρυντικά αποτελέσματα (Ενδεικτικά: Peitgen, H. O., 1999, Skordoulis, C., 2005, Komorek, M. 2004). Στις έρευνες αυτές διαφέρουν, κατά περίπτωση, τα πεδία διερεύνησης της μη γραμμικότητας, οι βαθμίδες της εκπαίδευσης, η επιλογή στοιχείων της θεωρίας, τα μαθήματα καθώς και η πρόταση διδασκαλίας. Οι απαντήσεις είναι ακόμη λίγες και τα ερωτηματικά πολλά.

Η δική μας εργασία ξεκίνησε το 2004 με φιλόδοξη διάθεση και πολλά ερωτηματικά. Διδακτική διερεύνηση ναι, αλλά σε ποια βαθμίδα; Σε ποιά τάξη; Ποια πτυχή της πλατιάς και περίπλοκης θεώρησης της μη γραμμικότητας; Διερεύνηση της διαθεματικής ή διαπολιτισμικής παραμέτρου στην διδακτική αξιοποίηση; Χρήση των νέων τεχνολογιών και σε ποιο βαθμό; Με ποια ερευνητική μεθοδολογία, με ποια διδακτική προσέγγιση στην ενδεχόμενη διδακτική πρόταση; Οι απαντήσεις σε όλα τα παραπάνω δόθηκαν σταδιακά με την πορεία της διερεύνησής μας. Και φυσικά ξεπεράσαμε το αναμενόμενο χρονοδιάγραμμά μας.

Ξεκινήσαμε το 2004 και 2005 με την επιλογή του κατάλληλου πλαισίου της θεωρίας (κεφάλαιο II). Λόγω της ευρύτητας του θέματος μας επιλέξαμε σαν πρώτο στάδιο στη διερεύνηση μας μια ευέλικτη στρατηγική έρευνας δράσης (κεφάλαιο III) που προκαθόρισε και τη συνέχεια της διερεύνησής μας. Η έρευνα δράσης συμπεριλάμβανε -λαμβάνοντας υπόψη και την πολιτισμική παράμετρο- πιλοτικές διδασκαλίες στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση σε Ελλάδα και Γερμανία (κεφάλαιο IV) και συνεχίστηκε με αντίστοιχη διερεύνηση και πιλοτικές διδασκαλίες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη Θεσσαλονίκη (κεφάλαιο V), στην οποία πλέον εστιάσαμε τη συνέχεια της προσπάθειάς μας σε ένα δεύτερο και ένα τρίτο και τελικό στάδιο έρευνας. Στο δεύτερο στάδιο πραγματοποιήθηκε εκτεταμένη και αναλυτική διερεύνηση τύπου σπουδής περίπτωσης σε ένα συγκεκριμένο γυμνάσιο Θεσσαλονίκης (κεφάλαιο VI). Η διερεύνηση -που συμπεριλάμβανε και διαθεματικές προεκτάσεις- ανέδειξε πολύτιμα στοιχεία για τον τρόπο σκέψης των μαθητών και καθόρισε σε γενικές γραμμές τον πυρήνα της διδακτικής παρέμβασης και τα όρια στην επίτευξη του στόχου μας. Αποδείχθηκε με τον τρόπο αυτό ίσως η παρέμβαση κλειδί για τη συνέχεια της διερεύνησης μας. Από το σημείο αυτό και με τον πυρήνα της διδακτικής παρέμβασης δεδομένο, προχωρήσαμε στη στατιστική διερεύνηση.

Από το 2006 μέχρι και το 2009 πραγματοποιήσαμε το τρίτο και κύριο στάδιο της διερεύνησής μας τύπου Θεμελιωμένης Θεωρίας σε μεγάλο αριθμό γυμνασίων (κεφάλαιο VII πρώτο, κεφάλαιο VIII δεύτερο και κεφάλαιο IX τρίτο μέρος της Θεμελιωμένης Θεωρίας). Η διερεύνηση συμπεριλάμβανε τις έννοιες που μας ενδιαφέρουν, τις εξειδικευμένες έρευνες για τις σχετικές απόψεις των μαθητών, τους γνωστικούς στόχους των δραστηριοτήτων (κεφάλαιο VII), την ανάλυση των αποτελεσμάτων ανά σχολείο χρονολογικά (κεφάλαιο VIII), καθώς και τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα (κεφάλαιο IX). Με τη Θεμελιωμένη Θεωρία, η ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων μας βρισκόταν σε συνεχή ανατροφοδότηση, αξιολογούταν άμεσα (η τελική αξιολόγηση παρατίθεται στο κεφάλαιο XI), και ανέδειξαν την τελική μας πρόταση (κεφάλαιο X). Με τον τρόπο αυτό τα κεφάλαια αυτά της Θεμελιωμένης Θεωρίας φαίνεται να αποτελούν ένα αυτόνομο σχεδόν πλήρες τμήμα στην εργασία μας, που θα μπορούσε από μόνο του ενδεχόμενα να αποτελέσει αρχή και τέλος στην έρευνά μας.

Η εντύπωση όμως αυτή είναι φαινομενική. Η Αμερική θα μπορούσε ενδεχόμενα να είχε ανακαλυφθεί πολύ πιο εύκολα αν οι εξερευνητές ήξεραν τον δρόμο (το *αυγό του Κολόμβου*). Χωρίς τις προηγούμενες φάσεις της έρευνας δε θα είχαμε προσανατολιστεί στις έννοιες, στην τάξη και βαθμίδα εκπαίδευσης και στους γνωστικούς στόχους που μας ενδιέφεραν, δε θα είχαμε προσανατολιστεί καν στη Θεμελιωμένη Θεωρία.

Μετά το τέλος της εκτενούς διερεύνησής μας, ακολούθησε η συγγραφή της διατριβής. Στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα όμως προέκυψαν περισπάσεις και εμπόδια προσωπικά και επαγγελματικά, που δεν αφορούσαν μεν άμεσα την εργασία, ωστόσο που καθυστέρησαν σημαντικά την κατάθεσή της.

Παρόλα τα εμπόδια και τις καθυστερήσεις πιστεύουμε ότι τα αποτελέσματα της προσπάθειας μας ήταν θετικά. Η εργασία μας κατέληξε σε επιβεβαίωση της δυνατότητας διδακτικής αξιοποίησης μη γραμμικότητας στη γενική εκπαίδευση και σε συγκεκριμένη πρόταση διδασκαλίας στο μάθημα μαθηματικών στην Γ΄ τάξη γυμνασίου.

Θεωρούμε ότι η διδακτική μας πρόταση είναι η βέλτιστη δυνατή. Τα ποσοστά των σωστών καταγραφών των μαθητών ακόμη και στις πιο δυσνόητες έννοιες της μη γραμμικότητας παρέμειναν στο 75 έως 100% τα δυο τελευταία έτη των διδακτικών μας παρεμβάσεων και η ανάλυση των σχετικών αιτιολογήσεων των μαθητών έδειξε την κάλυψη των γνωστικών μας στόχων σε ένα ποιοτικό επίπεδο που δεν αναμέναμε στην αρχή της προσπάθειάς μας.

ΚΕΦ. ΙΙ
Εισαγωγή στη μη γραμμικότητα

1. Επιλογή της θεωρίας

1.1 Παράμετροι που λάβαμε υπόψη μας για την επιλογή της θεωρίας που θα διδάσκαμε.

Η μη γραμμική προσέγγιση περιλαμβάνει ένα σύνολο θεωριών και εφαρμογών στις θετικές επιστήμες. Η διδακτική αξιοποίηση στη γενική εκπαίδευση του συνόλου της μη γραμμικότητας ούτε είναι εφικτή ούτε αποτέλεσε σκοπό της εργασίας αυτής. Επιλέχθηκαν στοιχεία μόνο της μη γραμμικότητας, η διδακτική αξιοποίηση των οποίων διερευνήθηκε. Η επιλογή αυτή άπτεται πολλών παραμέτρων:

1. Εφόσον η εργασία αυτή αποτελεί εργασία διδακτικής προσέγγισης, είναι επόμενο η πρώτη και κυριότερη παράμετρος της επιλογής να είναι η αναγκαιότητα και η δυνατότητα της διδασκαλίας των επιλεγμένων στοιχείων σε συγκεκριμένη βαθμίδα και τάξη της γενικής εκπαίδευσης.

2. Η επιλογή αυτή όμως δεν έχει νόημα να πραγματοποιηθεί σε βάρος της πληρότητας της επιστημονικής θεωρίας, διότι στην περίπτωση αυτή η διδακτική αξιοποίηση δεν θα αναφέρεται στη θεωρία της μη γραμμικότητας, αλλά απλά και μόνο σε ένα αυθαίρετο τμήμα της. Για τον λόγο αυτό, η επόμενη παράμετρος που λάβαμε υπόψη είναι η διατήρηση της πληρότητας της θεωρίας ώστε να μη μείνει κάποιο απαραίτητο τμήμα της έξω από τη διαδικασία της διδακτικής αξιοποίησης. Το έργο αυτό φαίνεται καταρχήν δύσκολο, καθώς η μη γραμμικότητα αποτελεί ένα σύνολο θεωριών στις θετικές επιστήμες, με προεκτάσεις που από μόνες τους αποτελούν εκτενείς ενότητες και αποτελούν ακόμη αντικείμενα θεωρητικής έρευνας. Η εκτενής αναφορά στο σύνολο των μη γραμμικών θεωριών δεν έχει θέση στην εργασία αυτή. Αλλά και η διδακτική προσέγγιση της εργασίας αυτής

δεν μπορεί να αναφέρεται στην αυθαίρετη παράθεση μερικών μόνο απλοποιημένων εννοιών της μη γραμμικότητας.

Για τους παραπάνω λόγους η παράμετρος της διατήρησης της πληρότητας της θεωρίας βρίσκεται σε συνεχή αλληλεπίδραση με τη διδακτική παράμετρο. Ανάλογες έρευνες που προηγηθήκαν στη διδακτική μη γραμμικών προσεγγίσεων τονίζουν την αλληλεπίδραση αυτή, όπου η στοιχειοθεσία της επιστημονικής θεωρίας καθοδηγείται και από την πορεία της διδακτικής έρευνας (Komorek, M. 1997).

Δυο ακόμη παράμετροι που καθορίζουν την επιλογή των στοιχείων της θεωρίας είναι

3. Η ιστορική εξέλιξη των μη γραμμικών θεωριών και

4. Η επιστημολογία τους.

Η ιστορική τους εξέλιξη αντανακλά τον αγώνα κατάκτησης της θεωρίας (με άμεσες διδακτικές προεκτάσεις), η επιστημολογία τους αποτελεί πεδίο προβληματισμού και εφαρμογών στη διαθεματικότητα (από τη φυσική, τα μαθηματικά κ.λπ.) της εργασίας αυτής.

Λαμβάνοντας υπόψη τις τέσσερις παραπάνω παραμέτρους η εισαγωγή στη μη γραμμικότητα ξεκινά με μια ιστορική διαδρομή στη θεωρία και την ανάλυσή της στα μαθηματικά (ενότητα ΙΙ.2), ειδικότερη ανάλυσή της στη γεωμετρία (ενότητα ΙΙ.3) και παραθέτει στο τέλος του κεφαλαίου (ενότητα ΙΙ.4) μια βαθύτερη διεπιστημονική της εμβάθυνση. Η παραπάνω σε γενικές γραμμές ολοκληρωμένη παράθεση της θεωρίας στο κεφάλαιο αυτό δε χρησιμοποιείται στο σύνολό της στη διερεύνησή μας. Αντίθετα χρησιμοποιούνται συχνά οι βασικές ενότητες 2.2. (χαοτική συμπεριφορά), 3.1. (αυτοομοιότητα, επαναληπτικότητα) 3.1.1 (διάσταση αυτοομοιότητας), 3.4 (κλασματοειδή σχήματα), και 4.4.2. (μαγνητικό εκκρεμές). Οι παραπάνω έννοιες (καθώς και οι σχετικές απόψεις των μαθητών) αναφέρονται ξανά στο κεφάλαιο VII, όπου αναλύονται στο πλαίσιο της διδακτικής διερεύνησης.

Από το κεφάλαιο αυτό στο σύνολό του επιλέξαμε τον πυρήνα, τις βασικές δηλαδή έννοιες της μη γραμμικότητας που είναι απαραίτητες στην εργασία μας και παρατίθεται στην αρχή του επόμενου κεφαλαίου (ενότητα ΙΙΙ.1.1). Στη συνέχεια στα επόμενα κεφάλαια, ακολουθεί η διερεύνηση της διδακτικής αξιοποίησης των επιλεγμένων αυτών εννοιών. Αν και η διδακτική έρευνα αλληλεπιδρά όπως αναφέρθηκε με τη θεωρία, ο πυρήνας της θεωρίας δεν αλλάζει, και η εργασία μας διατηρεί σε όλα τα στάδιά της σταθερό προσανατολισμό προς αυτόν.

1.2 Ιστορική εισαγωγή.

Η αρχή της θεωρίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων θα πρέπει να αναζητηθεί στο έργο του Poincare. Μελετώντας γύρω στο 1890 το ερώτημα της σταθερότητας των πλανητικών τροχιών (καίριο ερώτημα της επιστήμης στο τέλος 19^{ου} αιώνα), όπως προκύπτει από τις μηχανιστικές κοσμοθεωρίες των Νεύτωνα, Leibnitz και Laplace, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υπήρχαν μεν σταθερές αλλά υπήρχαν και ασταθείς πλανητικές τροχιές, όπου μικρές διαταραχές μπορεί κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες να οδηγήσουν μετά από πολλές επαναλήψεις σε απρόβλεπτες και δραστικές μελλοντικές αλλαγές των τροχιών (Χρηστίδης, Θ. 1997). Η διερεύνηση της αιτίας αυτής της διαφοράς αποτέλεσε έργο ζωής για τον ίδιο (*αυτά τα πράγματα είναι τόσο παράξενα που δεν αντέχω άλλο να τα σκέφτομαι,* (Poincare 1899)), και τον οδήγησε στην ανάπτυξη έξοχων θεωρητικών εργαλείων στα μαθηματικά και στη φυσική (Komorek, M. 1997).

Οι Fricke και Klein πειραματίστηκαν την ίδια περίοδο (Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, 1897) με τους φοιτητές τους πάνω στις αυτοόμοιες συναρτήσεις. Ανάλογα συμπεράσματα εμφανίζονται διάσπαρτα στους J. Perrin και W. Feller που μελέτησαν την κίνηση Brown στα βιβλία Les Atomes και Introduction to Probability αντίστοιχα, καθώς και σε ανεξάρτητα άρθρα και αλληλογραφία των Esher και Coxeter κ.α. (Barnsley, M.F. 1993, Devaney, R.L.1993).

Παρόλο που το θεωρητικό και τεχνικό εργαλείο της έρευνας ήταν περιορισμένο, οι έρευνες των Laplace, Maxwell, Poincare ήδη εντόπισαν την αδυναμία της δυνατότητας πρόβλεψης και του εσφαλμένου μονόδρομου αιτίας-αποτελέσματος της κλασικής (μηχανιστικής) αντίληψης του κόσμου από τον 19^{ο}

αιώνα. Η συνολική (παγκόσμια) δυνατότητα πρόβλεψης παρέμενε θεωρητικά ενεργή, με την επιστημολογική παραδοχή ενός παντογνωστικού όντος («δαίμονας» του Laplace), αλλά ήταν ήδη παραδεκτό ότι ο μονόδρομος αιτίας-αποτελέσματος της κλασικής φυσικής δηλαδή *η ισχυρή αιτιοκρατία*, δεν ήταν πάντα μονόδρομος. Με τη μετάβαση στον 20ο αιώνα τα μαθηματικά εργαλεία εξελίχθηκαν περισσότερο.

Μελετήθηκαν νέα σχήματα (κλασματοειδή σχήματα ή *fractal*), που εμφάνιζαν αυτοομοιότητα και άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες κατά τις συνεχείς επαναλήψεις τους. Ένα σχόλιο του F.J.Dyson για τα νέα σχήματα: *Fractal είναι μια λέξη που επινοήθηκε από τον Mandelbrot για να περιγράψει ένα μεγάλο σύνολο από μαθηματικά αντικείμενα που αποτέλεσαν σταθμό στην εξέλιξη των μαθηματικών. Χαρακτηρίστηκαν «παθολογικά» ή «τέρατα» από τους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα γιατί δεν ταίριαζαν στην κανονική γεωμετρία του Ευκλείδη και την κανονική δυναμική του Νεύτωνα.* Αυτά αποτέλεσαν όμως την αρχή, (με το Cantor set και την καμπύλη Peano), των μοντέρνων μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Mandelbrot *οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα στερούνταν φαντασίας η φύση όμως όχι* (Mandelbrot B. B. 1983).

Αναλυτικές λύσεις και προσεγγιστικά σύνολα λύσεων κατά την εξέλιξη δυναμικών συστημάτων μελετήθηκαν από τους Kolmogorov, Arnold, Moser (στο Komorek, M. 1997). Σημαντική ώθηση στη μελέτη της εξέλιξης των δυναμικών συστημάτων -στη χαοτική εξέλιξη τους ειδικότερα- δόθηκε από τον E. Lorenz (1963) στην εργασία του για τη δυνατότητα μετεωρολογικών προβλέψεων (Gleick, J. 1990). Ο Lorentz είχε πλέον στη διάθεσή του τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, ένα αναντικατάστατο τεχνικό εργαλείο για τη μελέτη των πιθανών μελλοντικών μοντέλων κατά την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος.

Η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τα τελευταία χρόνια έδωσαν νέα ώθηση και νέα εργαλεία μελέτης των δυναμικών συστημάτων. Η θεωρία της μη γραμμικότητας αναπτύχθηκε έτσι σε μεγάλο βαθμό, περιλαμβάνοντας μεθόδους λύσεων της εξέλιξης δυναμικών συστημάτων στη φυσική και στα μαθηματικά, μαζί με μια συναφή νέα γεωμετρία. (Mandelbrot B.B. 1983).

Η παραπάνω αναδρομή ανέδειξε την ιστορική προσέγγιση της θεωρίας. Στη συνέχεια είναι ακολουθεί η επιστημονική εισαγωγή στη θεωρία.

2. Μη γραμμικότητα στα μαθηματικά

2.1. Εισαγωγή στα δυναμικά συστήματα

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι εξισώσεις που αποτελούνται από συναρτήσεις μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών και τις παραγώγους τους ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι μόνο μια η διαφορική εξίσωση λέγεται συνήθης διαφορική εξίσωση**:**

$$F(x, y(x), y(x)', y(x)'', \ldots, y(x)^{(r)}) =0 \qquad (1)$$

Αν η σειρά των $y(x), y(x)', y(x)'', \ldots, y(x)^{(r)}$ είναι γραμμική τότε και μόνο τότε η διαφορική εξίσωση λέγεται **γραμμική** (Bronstein, I. N. and Semendjajew, K. A. 1991, Μπούντης, Τ. 1997).

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t (δηλαδή το σύστημα μας εξελίσσεται χρονικά), το σύστημα που περιγράφει η διαφορική εξίσωση λέγεται **δυναμικό**. Η διαφορική εξίσωση, (differential equation) περιγράφει μια συνεχή μεταβολή ως προς το χρόνο. Μια ασυνεχής μεταβολή μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια μιας ακολουθίας (difference equation). Η εξέλιξη της ακολουθίας P_n παίρνει τη μορφή **συνεχών επαναλήψεων (Iterations)**, που αντιστοιχούν στη σύνθεση συναρτήσεων:

t_0 , $f(t_0)$, $f(f(t_0))$, $f(f(f(t_0)))$ .... (Devaney, R.L.1986).

Η έννοια Iteration χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην εργασία αυτή. Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων όπου όλες είναι γραμμικές ονομάζεται γραμμικό, διαφορετικά ονομάζεται **μη γραμμικό δυναμικό σύστημα** (Μπούντης, Τ. 1997)

Οι περισσότερες εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη δυναμικών συστημάτων είναι μη γραμμικές. Η επίλυση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι συνήθως δυσκολότερη και πολλές φορές μόνο τοπικά δυνατή ή κατά περίπτωση μόνο αριθμητικά δυνατή. Υπάρχουν αρκετές προσεγγιστικές μέθοδοι όπου μια ή περισσότερες μη γραμμικές εξισώσεις προσεγγίζονται ως γραμμικές για την επίτευξη αναλυτικών λύσεων, μια διαδικασία που ονομάζεται **γραμμικοποίηση** (Nonnenmacher T. F. 1996, Χατζηδημητρίου, Ι. 2010).

Ωστόσο είναι συχνά δυνατό οι λύσεις μη γραμμικών δυναμικών εξισώσεων να ανάγονται σε λύσεις αυτοομοιότητας της μορφής (Nonnenmacher T. F. 1996):

$$x(\lambda t)= \lambda^{\alpha}\, x(t) \qquad (2)$$

Σε αναλογία με την αυτοομοιότητα που εμφανίζουν γεωμετρικά σχήματα (ενότητα 3.1.) κάθε συνάρτηση $f(\lambda t)=\lambda^{\alpha}f(t)$ μπορεί να χαρακτηριστεί ως **αυτοόμοια**, και **επαναλαμβανόμενη** με χαρακτηριστική διάσταση αυτοομοιότητας α και είναι **ανεξάρτητη από την κλίμακα** χρόνου (t). Η **χαρακτηριστική διάσταση α** είναι μη ακέραιος αριθμός (Nonnenmacher T. F. 1996, Μπούντης, Τ. 1997) Οι παραπάνω έννοιες, ειδικά η έννοια **αυτοομοιότητα** εμφανίζονται πολύ συχνά στην εργασία αυτή. Σε αναλογία με την εφαρμογή της υπέρθεσης στη λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η λύση των μη γραμμικών διευκολύνεται από εφαρμογή της ιδιότητας της αυτοομοιότητας (self-similarity), (Nonnenmacher T. F. 1996, Schröder, M. 1991).

2.2 Χαοτική συμπεριφορά, διάγραμμα Feigenbaum.

Μια από τις σημαντικότερες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι η λεγόμενη λογιστική εξίσωση:

$$dP(t)/dt= k\, P(t)\, (L-P(t)) \qquad (3)$$

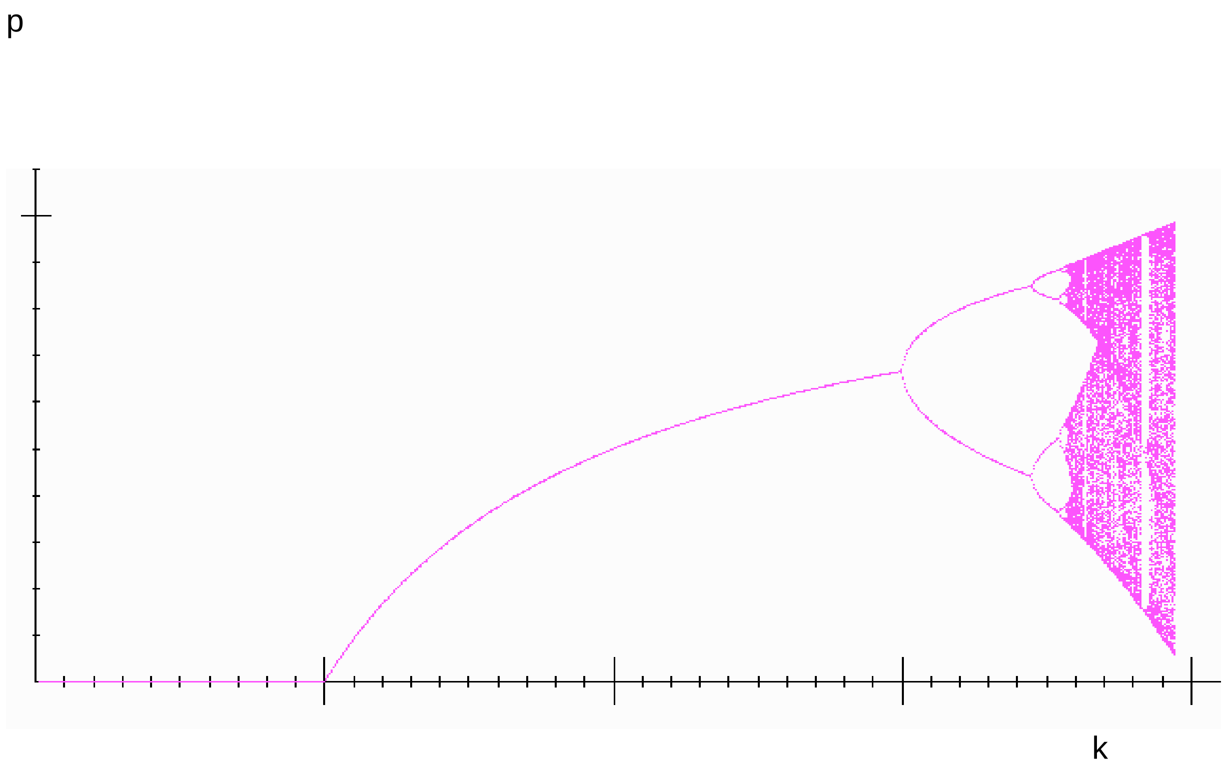
Η λογιστική εξίσωση μπορεί για παράδειγμα να περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού ενός βιολογικού είδους σε ένα απομονωμένο νησί, όπου k ο ρυθμός αναπαραγωγής του είδους και L το μέγιστο όριο πληθυσμού. Σε μορφή ακολουθίας και με μέγιστο πληθυσμό L=1 είναι:

$$P_{n+1}=kP_n(1-P_n) \qquad (4)$$

Εδώ η ακολουθία περιγράφει την εξέλιξη σε ένα απομονωμένο σύστημα ενός πληθυσμού p_n της γενεάς n, σε σχέση με τον συντελεστή αναπαραγωγής k. Ο αριθμός p_n εκφράζεται σε υποπολλαπλάσια του 1, ($p_n < 1$). Ο συντελεστής k αντιπροσωπεύει τον μέσο αριθμό απογόνων ανά άτομο του πληθυσμού (σχετίζεται για παράδειγμα με την επάρκεια τροφής), και κυμαίνεται σε συγκεκριμένα περιθώρια τιμών k όπου $0<k\leq4$.

Η εξέλιξη του πληθυσμού της επόμενης γενεάς p_{n+1} είναι ανάλογη του συντελεστή αναπαραγωγής k και του προηγούμενου πληθυσμού $p_{n.}$ Υψηλή τιμή επόμενης γενιάς p_{n+1} έχουμε με υψηλό συντελεστή αναπαραγωγής k και υψηλό πληθυσμό προηγούμενης γενιάς $p_{n.}$ Εφόσον το σύστημα είναι απομονωμένο και η ποσότητα τροφής σταθερή, η συνεχής αύξηση του πληθυσμού θα οδηγήσει αναπόφευκτα σε έλλειψη τροφής και θάνατο ενός τμήματος του πληθυσμού, που φυσικά δεν θα συμμετέχει στη διαδικασία αναπαραγωγής για τη γενεά p_{n+1}. Οι θάνατοι αυτοί περιγράφονται με τον όρο $(1 - p_n)$. Ο πληθυσμός είναι αδύνατο να φτάσει στο θεωρητικό μέγιστό του $p_n = 1$, γιατί τότε το είδος θα εξαφανιστεί από την απόλυτη έλλειψη τροφής.

Με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή μπορούμε να υπολογίσουμε την πορεία του πληθυσμού για πολύ μεγάλα n και για όλες τις τιμές $0<k\leq4$. Το διάγραμμα της λογιστικής εξίσωσης που σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται διάγραμμα Feigenbaum:



Εικόνα 1: Διάγραμμα Feigenbaum

Το διάγραμμα εμφανίζει τις δυνατές εξελίξεις του πληθυσμού σε σχέση με τις διάφορες τιμές του k από 0 έως 4, και είναι χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση των εννοιών της μη γραμμικότητας. Ο επαγωγικός σχηματισμός κάθε νέας p_{n+1} από την p_n χαρακτηρίζεται σαν **επανάληψη** (iteration) της ακολουθίας p_n. Η ακριβής μαθηματική διατύπωση της έννοιας iteration είναι:

$$p_{n+1} = f(p_n)$$

Κάθε συνάρτηση $f(x_n)$ που σχηματίζεται με επαναλήψεις (iterations) διατυπώνεται ανάλογα:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Η τιμή x ονομάζεται **σταθερό σημείο** (**fixpoint**) της συνάρτησης αυτής όταν ισχύει:

$$x = f(x)$$

Η τιμή x ονομάζεται σταθερό σημείο δεύτερης περιόδου της συνάρτησης αυτής όταν κατά την επόμενη επανάληψη ισχύει:

$x = f(f(x))$

Η τιμή x ονομάζεται σταθερό σημείο περιόδου k, της συνάρτησης αυτής όταν ισχύει

$x = f^k(x)$

Η συνάρτηση κατά τις συνεχείς επαναλήψεις της n σχηματίζει μια γραμμή (**τροχιά**) στη γραφική παράσταση, μια γραμμή η οποία για ορισμένες αρχικές τιμές x_0 μπορεί να τείνει στο άπειρο. Η τροχιά της $f^n(x_0)$ ονομάζεται τότε **τροχιά διαφυγής**. Αντίθετα με μια αρχική τιμή x_0, και με τη μεταβλητή x στην περιοχή της τιμής x_0, είναι δυνατό να παρατηρήσουμε ότι όσο μεγαλώνει το n, τότε η $f^n(x_0)$ να τείνει να πλησιάζει στο σταθερό σημείο x:

$\lim f^n(x_0) = x$

Το σταθερό σημείο x ονομάζεται τότε **σημείο έλξης** (attracting fixed point) της περιόδου n της εξίσωσης $x_{n+1} = f(x_n)$ (Devaney R.L., 1986, Χατζηδημητρίου, I. 2010).

Μελετώντας τώρα το διάγραμμα Feigenbaum διαπιστώνουμε τα εξής:

Για $k \leq 1$ η $p_n \rightarrow 0$ (Ο πληθυσμός συγκλίνει στο 0). Δηλαδή ο ρυθμός γεννήσεων είναι πολύ μικρός και το είδος θα εξαφανιστεί.

Για $1 < k \leq 3$ η p_n τείνει σε κάποιο συγκεκριμένο αριθμό.

Στη συνέχεια για μεγαλύτερα k (για $3 < k < 3{,}25$) διαπιστώνεται η ύπαρξη δυο σταθερών σημείων και παρουσιάζεται μια διακλάδωση όπου οι τιμές p_n ταλαντώνονται ανάμεσα στα δύο σταθερά σημεία της δεύτερης περιόδου.

Η διαπίστωση αυτή επαναλαμβάνεται και ενισχύεται με μορφή χιονοστιβάδας για μεγαλύτερα k, (σταθερά σημεία της περιόδου 4, 8, 16 κλπ.), έως ότου τελικά για μια συγκεκριμένη τιμή k **εμφανίζεται μια εξαιρετικά πολύπλοκη**

και μη προβλέψιμη δομή των τροχιών των σημείων p_n . Εδώ, έστω και μικρές αλλαγές στις αρχικές τιμές καθιστούν **αδύνατη την πρόβλεψη της εξέλιξης** του πληθυσμού μέσα στη χιονοστιβάδα των πιθανών εξελίξεων. Η συμπεριφορά αυτή ονομάζεται **χαοτική** (Devaney R.L. 1986, Χατζηδημητρίου, Ι. 2010), και για αυτό η θεωρία εξέλιξης δυναμικών συστημάτων αναφέρεται εκλαϊκευμένα και **σαν θεωρία του χάους,** (ενδεικτικά**:** http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Outline.html**)**.

Η χαοτική συμπεριφορά φαίνεται να παύει απότομα για μια τιμή $k \cong 3.9$, όπου εμφανίζονται (απολύτως μη αναμενόμενα θα λέγαμε) 3 σταθερά σημεία και μόνο. Όμως αμέσως μετά η χιονοστιβάδα των τροχιών εξακολουθεί οδηγώντας πάλι σε χαοτική συμπεριφορά. Η ξαφνική εμφάνιση των 3 σταθερών σημείων μέσα στη χαοτική συμπεριφορά των άπειρων σημείων που προηγήθηκε είναι εντυπωσιακή. Το σύντομο διάλειμμα της χαοτικής συμπεριφοράς είναι γνωστό και σαν **τάξη μέσα στο χάος** (Devaney R.L. 1986).

Η παρακολούθηση της εξέλιξης του πληθυσμού στο παραπάνω διάγραμμα στάθηκε δυνατή μόνο με την εξέλιξη του μαθηματικού εργαλείου και με τη βοήθεια του Η.Υ. Οι εκπληκτικές διαπιστώσεις που προκύπτουν από τη μελέτη του διαγράμματος και η πρόοδος ολόκληρης της θεωρίας κατ επέκταση θα ήταν αδύνατες χωρίς την εξέλιξη των παραπάνω εργαλείων.

2.2.1 Ανάλυση του διαγράμματος Feigenbaum και γενίκευση.

Αναλύοντας περισσότερο το διάγραμμα (Devaney, R.1990) διαπιστώνουμε ότι:

α. Οι επαναλήψεις (Iterations) της λογισμικής εξίσωσης παίρνουν γρήγορα απρόβλεπτες και πολύ διαφορετικές τιμές για συγκεκριμένες τιμές του k.

β. Ωστόσο όπως αναφέρθηκε, είναι εκπληκτικό ότι για συγκεκριμένες τιμές του k (k= 3,839) εμφανίζεται μια περίοδος 3 μόνο σημείων έλξης P(1)=0,149888, P(2)=0,49172, P(3)=0,959299 και η εξέλιξη της τροχιάς παύει για το συγκεκριμένο k να είναι χαοτική. Για την ακρίβεια έχουμε τρεις (ασυμπτωτικά) σταθερές τιμές. Ανεξάρτητα από το σημείο x με το οποίο ξεκινάμε, ανεξάρτητα με οτιδήποτε προηγήθηκε, η τιμή της P(x) θα είναι μόνο μια από τις παραπάνω και καμιά άλλη τιμή δεν είναι δυνατή. Τα σημεία αυτά αποτελούν μια απρόσμενη **τάξη** στη χιονοστιβάδα απρόβλεπτων τροχιών.

γ. Υπάρχουν σημεία όπου μικρές διαφορές της μεταβλητής x οδηγούν σε τροχιές πολύ μακριά από την αρχική. Τέτοια σημεία υπάρχουν (στο k=4 για παράδειγμα) όπου μικρές διαφορές από x_0= 0,5 σε x_0= 0,501 ή σε έστω σε x_0= 0,5001, και οδηγούν σε δραματικές μεταβολές των τροχιών του συστήματος και σε **ασταθείς τροχιές** (unstable orbits). Εδώ έχουμε **ευαίσθητη εξάρτηση** από τις αρχικές συνθήκες του δυναμικού συστήματος, εγγενές χαρακτηριστικό των χαοτικών συστημάτων (Devaney, R.L. 2003).

Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες δεν αποτελεί χαρακτηριστικό μόνο της λογιστικής εξίσωσης. Κάθε χαοτικό δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα αυτή. Η παραπάνω σύνθετη δυναμική συμπεριφορά, (γνωστή και σαν «explosion»), μελετάται συστηματικά από το 1980 και αποτελεί νέο πεδίο έρευνας στην εξέλιξη των μαθηματικών (Χατζηκυριάκου, Κ. 2004, Devaney, R.L. 2003).

Γενικά ένα δυναμικό σύστημα με λύση τύπου

$F(x)=c\, e^z$ με $c>0$, $z=x+yi$ (5)

παρουσιάζει τουλάχιστον ένα σημείο (c=1/e), όπου οι τροχιές αντί να είναι σχετικά περιορισμένες, απομακρύνονται δραστικά και γεμίζουν ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Το σύνολο σημείων Julia (το οποίο αναφέρεται πιο κάτω), παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες σε σχέση με τα άλλα γνωστά σύνολα, (Devaney, R.L. 1990, Χατζηδημητρίου, Ι. 2010).

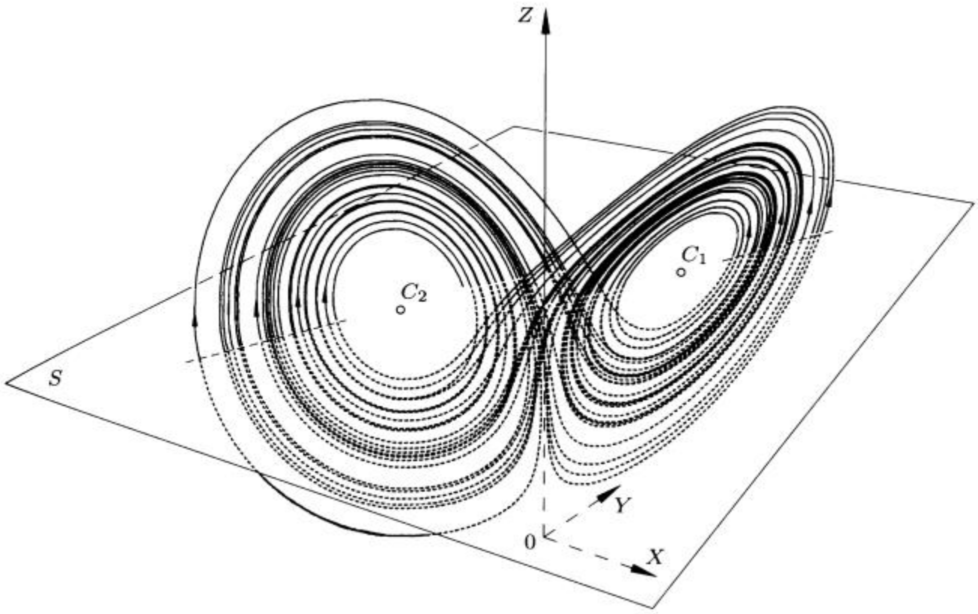
2.3 Ελκυστές

Τα παραπάνω παραδείγματα μη γραμμικών εξισώσεων είναι μόνο ενδεικτικά. Υπάρχουν αναρίθμητες μη γραμμικές εξισώσεις στη φυσική και στα μαθηματικά (π.χ. θεώρημα KAM, Kolmogorov-Arnold-Moser, θεώρημα Poincare-Birkhoff, προσεγγίσεις θεωριών διαταραχής κ.α.), που καταλήγουν όμως πάντα σε ανάλογες διαπιστώσεις όπως με τη λογιστική εξίσωση. Δηλαδή σε μια απρόβλεπτη χιονοστιβάδα τροχιών, εμφανίζονται κάποια στιγμή σταθερές δομές οι οποίες φαίνεται να έλκουν ασυμπτωτικά τις γειτονικές τροχιές. Στον χώρο των φάσεων οι δομές αυτές ονομάζονται **ελκυστές** (attraktors) ακριβώς λόγω της παραπάνω ιδιότητας, και αποτελούν έκφραση τάξης ή σταθερότητας κατά την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος. Η έννοια του ελκυστή αποτελεί κεντρική έννοια της μη γραμμικότητας (στο Komorek, M. 1997, και Μπούντης, T. 1997).

Ένα σχετικά απλό παράδειγμα ελκυστή είναι η περιγραφή της εξέλιξης εξαναγκασμένης ταλάντωσης με τριβή στον χώρο των φάσεων. Ο ελκυστής αποτελεί μια έλλειψη ή κύκλο στον οποίο καταλήγουν οι πιθανές τροχιές ανεξάρτητα από την πορεία τους. Σαν ένα πιο σύνθετο παράδειγμα παρατίθεται ο πιο γνωστός ίσως ελκυστής, **ο ελκυστής Lorentz**. Ο E. N. Lorenz μαθηματικός και μετεωρολόγος, ασχολήθηκε με την εξέλιξη των μετεωρολογικών φαινόμενων και έθεσε τις βάσεις της χαοτικής θεωρίας στη μετεωρολογία. Η έκφραση **φαινόμενο της πεταλούδας**, που αναφέρεται στην ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες αυτών των συστημάτων, είναι δική του επινόηση https://el.wikipedia.org/wiki/Φαινόμενο_της_πεταλούδας.

Αν μια πεταλούδα κινήσει τα φτερά της στον Αμαζόνιο, μπορεί να φέρει βροχή στην Κίνα.

Ο ελκυστής που επινόησε και είναι γνωστός και ως **παράξενος ελκυστής** είναι ο εξής :



Lorenz-Attraktor für $r = 28, \sigma = 10$ und $b = 8/3$.
Der Trajektorienbereich, den die Ebene $Z = r - 1 = 27$ verdeckt, ist punktiert (Lanford, 1977)

Εικόνα 2: Ελκυστής Lorentz

Ένα βασικό κοινό χαρακτηριστικό των ελκυστών φαίνεται ήδη στην παραπάνω εικόνα. Η ανάλυση της δομής, οδηγεί σε όλο και μικρότερες ίδιες δομές και με τις ίδιες ιδιότητες. Η ιδιότητα αυτή της **αυτοομοιότητας** (self-similarity), αναφέρθηκε ήδη πιο πάνω στις μη γραμμικές εξισώσεις στην ενότητα 2.3.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω η περιγραφή της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος μπορεί να δοθεί έτσι με δυο ταυτόσημους τρόπους:

1. Με λύσεις των εξισώσεων εξέλιξης του μη γραμμικού συστήματος. Όμως η λύση του συστήματος απαιτεί πιο προχωρημένα μαθηματικά εργαλεία και δεν είναι πάντα δυνατή. Στις ενότητες 4.1, 4.2 θα εμβαθύνουμε περισσότερο στο σημείο αυτό.

2. Η περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος διευκολύνεται όμως πολύ με την ύπαρξη ελκυστή του συστήματος στο χώρο των φάσεων.

Στη δεύτερη περίπτωση είναι αρκετό να γνωρίζουμε σε πιο βαθμό **γεμίζουν οι τροχιές** το χώρο γύρω και μέσα (λόγω αυτοομοιότητας) του ελκυστή. Αυτό εκφράζεται με τη διάσταση αυτοομοιότητας του ελκυστή, η οποία είναι μη ακέραια και οπωσδήποτε μικρότερη από την τοπολογική διάσταση του χώρου φάσεων (Komorek, M. 1997, Schröder, M. 1991).

3. Μη γραμμικότητα στη γεωμετρία

Θέλω να γνωρίσω πως έπλασε ο Θεός τον κόσμο.
Δε με ενδιαφέρει το ένα ή το άλλο φαινόμενο,
υπό το πρίσμα αυτού ή του άλλου στοιχείου.
Θέλω να μάθω τις σκέψεις του.
Τα υπόλοιπα είναι λεπτομέρειες.
Albert Einstein

3.1 Εισαγωγή στα κλασματοειδή σχήματα (fractal).

Ο K. Falconer στο βιβλίο του Fractal Geometry γράφει: Η λέξη φράκταλ είναι σαν τη λέξη ζωή. Μπορείς να περιγράψεις τις βασικές της ιδιότητες και τα θεμελιώδη στοιχεία που την αποτελούν αλλά δεν μπορείς να την κλείσεις σε έναν ορισμό.

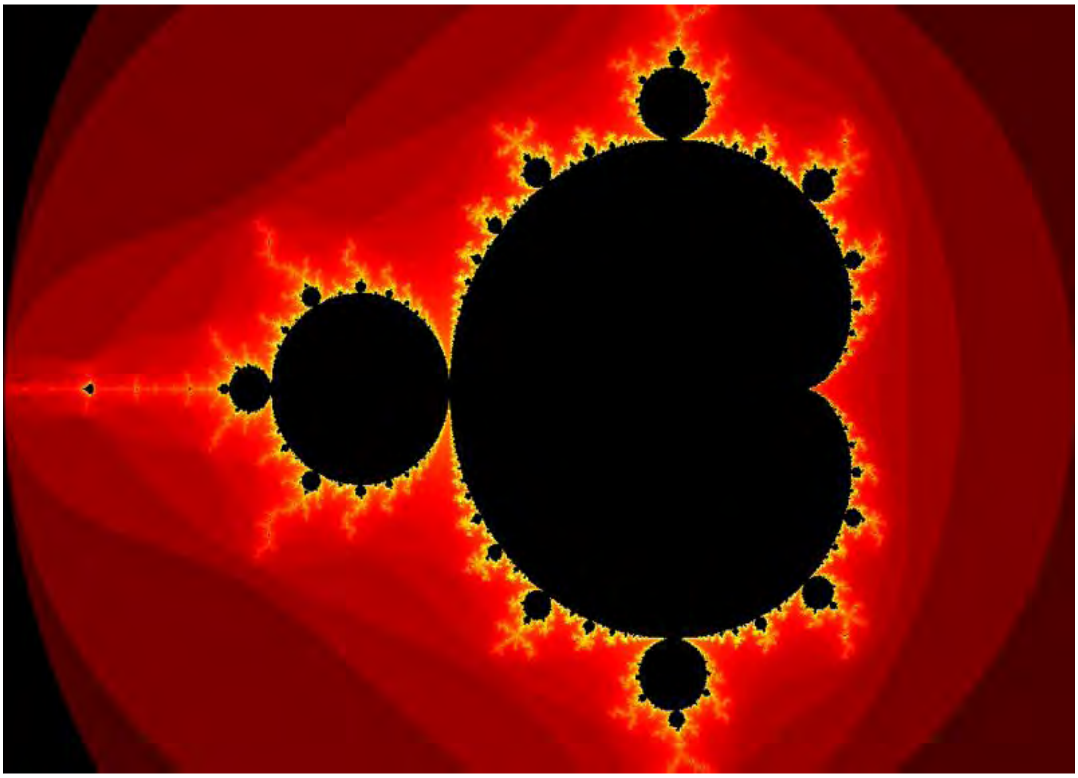
Επιχειρώντας να ορίσουμε κάπως την έννοια θα λέγαμε ότι " είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που μπορεί να υποδιαιρεθεί σε μέρη, κάθε ένα από τα οποία είναι ένα αντίγραφο μειωμένου μεγέθους του συνόλου. Τα Fractals είναι γενικά αυτοόμοια σχήματα ανεξάρτητα από την κλίμακα."

Τα **κλασματοειδή σχήματα** προτάθηκαν την δεκαετία 1970 από τον Benuit B. Mandelbrott σαν μια πιθανή νέα γεωμετρία για την περιγραφή της φύσης. Το **Mandelbrot set** είναι το πιο χαρακτηριστικό ίσως σχήμα, που ονομάστηκε και μελετήθηκε από τον ίδιο (μια όμορφη απεικόνιση https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE).

Προέρχεται από τη μελέτη λύσεων της οικογένειας εξισώσεων $Q_c(\chi)= z^2+c$ (z, c μιγαδικοί). Mandelbrot Set είναι το σύνολο των τιμών z= x+iy στο μιγαδικό επίπεδο για τα οποία η τροχιά του Q_c δεν τείνει στο άπειρο. Για αυτό το λόγο **η σημασία των χρωμάτων** του σχήματός του (βλ. εικόνα 3) έγκειται ακριβώς στη σχέση τους με τις τροχιές διαφυγής (Devaney, R.L. 1990). Δηλαδή το περίγραμμά του αποτελείται από τα σημεία τα οποία αποτελούν το όριο των τροχιών διαφυγής τετραγωνικών συναρτήσεων τύπου

$$Q_c(z)= z^2+c \qquad (6)$$

με z και c μιγαδικούς αριθμούς. Οι τετραγωνικές αυτές συναρτήσεις περιλαμβάνουν πολλές ειδικότερες κατηγορίες (π.χ. τα σύνολα Julia, με αντίστοιχο κλασματοειδές (fractal) το Julia Set κ.α.) και με την έννοια αυτή το Mandelbrot Set αποτελεί λεξικό των κλασματοειδών δομών (Devaney, R.L. 1990).



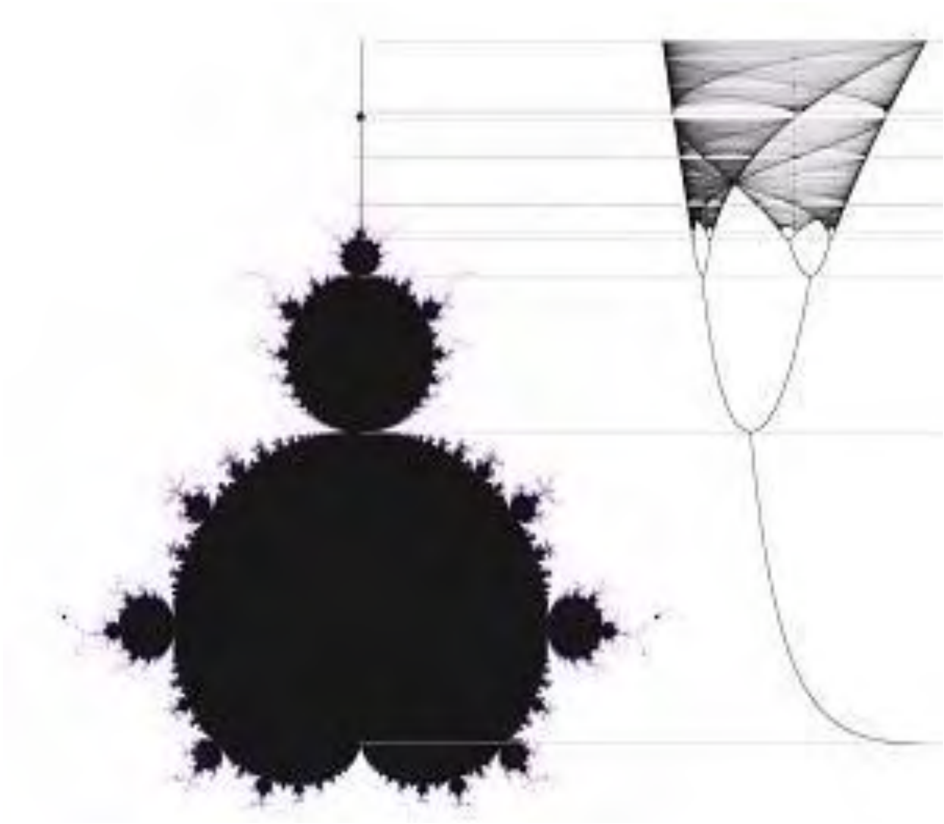
Εικόνα 3: Mandelbrot Set

Για τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου με |z|>2 όπου οι τροχιές της $Q_c(z)$ διαφεύγουν, το χρώμα του Mandelbrot Set είναι χαρακτηριστικό. Με μαύρο (μέσα στο περίγραμμα) είναι τα σημεία των οποίων οι τροχιές δε διαφεύγουν. Με άσπρο είναι τα σημεία των οποίων οι τροχιές διαφεύγουν σχετικά αργά, με ολοένα εντονότερο κόκκινο είναι τα σημεία των οποίων οι τροχιές διαφεύγουν ολοένα γρηγορότερα (Devaney, R.L. 1990 Marny F., Sylvia L. 1991).

A**υτοομοιότητα** στα fractal, είναι η ιδιότητα όπου σε κάθε επανάληψη του σχήματος κάθε κομμάτι του είναι ίδιο με το αρχικό υπό κλίματα, *Fractals for the Classroom, Part 1: Introduction to Fractals and Chaos* (Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L., 1992a). Η ιδιότητα αυτή είναι εμφανής στο Mandelbrot set. Γενικά οι βασικές έννοιες της **επαναληπτικότητας** (Iteration), **αυτοομοιότητας** (self similarity) και η

χαρακτηριστική διάστασή της (self similarity dimension) που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή για στα δυναμικά συστήματα (ενότητα 2.2), έχουν καθολική ισχύ στη γεωμετρία των fractal.

Η άμεση σχέση της γεωμετρίας fractal με την εξέλιξη των δυναμικών συστημάτων φαίνεται από τη σύγκριση των παρακάτω διαγραμμάτων Feigenbaum και Mandelbrot set:



Εικόνα 4: Mandelbrot Set και διάγραμμα Feigenbaum

Συγκρίνοντας τη γραφική παράσταση της λογιστικής εξίσωσης, με την απεικόνιση του Mandelbrot Set, και διατηρώντας $-2 \leq k = \mathrm{Re}$ και $c \leq 1/4$, (k και c οι σταθερές των εξισώσεων (4) και (6)), διαπιστώνεται με τρόπο εκπληκτικό και άμεσο η ταύτιση των κρίσιμων σημείων k= 1/4, k= –3/4 και k= 3,839 του διαγράμματος Feigenbaum που προαναφέρθηκαν με τους κόμβους του Mandelbrot Set (εικόνα 4), *Fractals for the Classroom, Part 2: Complex Systems and Mandelbrot Set* (Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D. 1992b). Άλλα κλασματοειδή σχήματα, εξίσου εκπληκτικά στις ιδιότητές τους, είναι το **τρίγωνο**

Sierpinski, το **Cantor Set**, η **γραμμή von Koch** (βλ. 3.4) κ.α. (Peitgen H.O. et al 1992 a,b).

Επαναλαμβάνουμε όμως εδώ ότι τα βασικά χαρακτηριστικά όλων των fractal είναι (Devaney, R. L.1990, Peitgen H.O. et al 1992 a,b):

Η αυτοομοιότητα.

Η επαναληπτικότητα.

Η μη ακέραιη διάσταση αυτοομοιότητάς τους.

3.1.1. Διάσταση αυτοομοιότητας.

Η διάσταση αυτοομοιότητας:

$$D = \frac{\log(N)}{\operatorname{Log}(L/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \qquad (7)$$

είναι άρρητος αριθμός. (Devaney R.L. 1990, Peitgen H.O. et al 1992 a,b , Nonnenmacher T.F. 1996). N(ε) είναι ο αριθμός των μερών του αυτοόμοιου σχήματος που προκύπτουν με κάθε επανάληψη, η διάσταση αυτοομοιότητας D είναι το όριο του εκθέτη του λόγου αυτοομοιότητας για $\varepsilon\to 0$. Το $\varepsilon\to 0$ αποδίδει την όσο το δυνατόν μικρότερη κλίμακα μέτρησης.

Ο παραπάνω ορισμός της διάστασης αυτοομοιότητας -πιο απλοποιημένος- χρησιμοποιήθηκε στην εργασία μας (κεφάλαιο VII 1.10, και 1.12 α).

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται και η διάσταση κυτίων (Box Dimension), καθώς και η μέθοδος (Yardstick) προσέγγισης γραμμών, που οδηγούν στην ίδια τιμή διάστασης για όπως και ο υπολογισμός με τη διάσταση αυτοομοιότητας (7), (Peitgen H.O et al 1999, Nonnenmacher T. F. 1996).

Αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι ο ορισμός της διάστασης εξαρτάται από την εκάστοτε μαθηματική οπτική (ευκλείδεια, τοπολογική, διάσταση αυτοομοιότητας κ.λπ.). Σε μία προσπάθεια να γίνουν κατανοητά τα κλασματοειδή σχήματα, μαθηματικοί όπως ο C. Caratheodory (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής), ο

F. Hausdorff και ο B. B. Mandelbrot γενίκευσαν την διαισθητική έννοια της διάστασης για να περιλάβουν τις τιμές μη-ακέραιων αριθμών. Ο πιο περίπλοκος ορισμός της διάστασης του Hausdorff είναι γεωμετρικής φύσης αν και είναι βασισμένος τεχνικά στα εργαλεία της μαθηματικής ανάλυσης. Αυτή την κατεύθυνση, μεταξύ άλλων ακολούθησε και ο Besicovitch. Η αναλυτική παράθεση του ορισμού της διάστασης Hausdorff- Besicowitch, (Μπακόπουλος Γ. 2000), όπως και άλλων μαθηματικών προσεγγίσεων της έννοιας της διάστασης (Gouyet, J-F. 1996, Kaye, B.H. 1994), ξεπερνά τους στόχους της εργασίας αυτής.

3.2 Ιστορική αναδρομή των κλασματοειδών σχημάτων

Ετυμολογικά για τα fractal -Nomen est Numen- όπως γράφει ο ίδιος ο δημιουργός τους στο Fractal Geometry of Nature (Mandelbrot B. B. 1983): *Η λέξη fractal προέρχεται από το λατινικό fractus που σημαίνει το σπασμένο αλλά και το ακανόνιστο. Περιγράφει δηλαδή τη δημιουργία ακανόνιστων μερών (fragments).*

Στα ελληνικά ο όρος θα μπορούσε να αποδοθεί ως **κλασματοειδή σχήματα** (Χατζηκυριάκου Κ. 2004). Ερευνητές όπως οι Cantor, Peano, Lebesque, Hausdorff, Besicowitch, Bolzano, Cesaro, Koch, Osgood, Sierpinski, Uryson μελέτησαν με τα παραπάνω σχήματα τη φύση (Mandelbrot B.B., 1983).

Η μεγάλη ώθηση στη γεωμετρία των fractal δόθηκε με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η I.B.M. από το 1974-75 διέθετε πόρους στη διάθεση προγραμματιστών και μαθηματικών στο T.J. Watson Research Center. Τα παραπάνω ερευνητικά προγράμματα απέδωσαν μια μεγάλη ποικιλία εφαρμογών fractal περί το 1983 (Peitgen, H. O., Richter, P. H. 1986, Barnsley. M. F. 1993, Devaney R.L.1990).

Η περίοδος μετά το 1975 ήταν ιδιαίτερα δημιουργική και διαπιστώθηκαν εφαρμογές της fractal γεωμετρίας σε όλο το φάσμα του φυσικού περιβάλλοντος, όπως διαπίστωσης fractal χαρακτηριστικών στον 1/f θόρυβο (Richard F. V. και Mandelbrot B.B.), προσομοίωση νεφών, βουνών, δέντρων με μια γεννήτρια και μια διάσταση επανάληψης fractal σχημάτων κ.α. Η ανάπτυξη ενός δένδρου π.χ. θα μπορούσε να περιγραφεί κατά προσέγγιση με τη μέθοδο των Witten-Sander: *Diffusion limited agregassion*. Τα παραπάνω συμπεριλήφθηκαν διεξοδικά από τον

B. Mandelbrot στο κλασικό του βιβλίο Fractal Geometry of Nature (Barnsley. M. F. 1993, Peitgen, H. O., Richter, P. H. 1986).

Η κεντρική ιδέα του Fractal Geometry of Nature είναι ότι σχήματα στη φύση όπως βουνά, νέφη, ακτογραμμές πολύ δύσκολα περιγράφονται από την ευκλείδεια γεωμετρία. Αντίθετα μπορούν να περιγραφούν με τη διαπίστωση της στατιστικής αυτοομοιότητας τους και τη βοήθεια Η.Υ. Ο Γαλιλαίος (1623) παραδεχόταν:

Το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών με χαρακτήρες τρίγωνα κύκλους και άλλα γεωμετρικά σχήματα, με τη βοήθεια των οποίων γίνεται κατανοητό στον άνθρωπο και χωρίς αυτά ο ερευνητής βαδίζει σε σκοτεινό λαβύρινθο.

Ο Mandelbrot διαπιστώνει στο βιβλίο του ότι:

Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακτογραμμές δεν είναι κύκλοι ούτε η αστραπή ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή.

Εντοπίζοντας τις διαφορές της ευκλείδειας και της fractal γεωμετρίας, παρατίθενται συγκριτικά τα εξής (Barnsley. M.F., 1993. Mandelbrot, B. B. 1983):

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	ΚΛΑΣΜΑΤΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (FRACTAL)
Περιγράφει παραδοσιακά σχήματα. (Ηλικίας άνω των 2000 ετών).	Περιγράφει νέα σχήματα. (Ηλικίας λίγων δεκαετιών)
Χρησιμοποιεί ένα μέτρο ή μια κλίμακα.	Είναι ανεξάρτητη από κλίμακα.
Περιγράφει τεχνητά αντικείμενα.	Περιγράφει φυσικά αντικείμενα.
Χρησιμοποιεί μαθηματικούς τύπους.	Χρησιμοποιεί αλγορίθμους επανάληψης.

Πίνακας 1: Σύγκριση ευκλείδειας και fractal γεωμετρίας

Το σύμπαν είναι φτιαγμένο με ένα σχέδιο του οποίου η απόκρυφη συμμετρία είναι κατά κάποιο τόπο παρούσα στην εσωτερική δομή της νόησης μας.

Paul Valery

Η προσβασιμότητά των Η.Υ. στην καθημερινή ζωή αλλά και στο χώρο της εκπαίδευσης παγκόσμια πια, αποκαλύπτουν ολοένα και ευρύτερα τη σημασία και ομορφιά της νέας γεωμετρίας (Peitgen, et al. 1999).

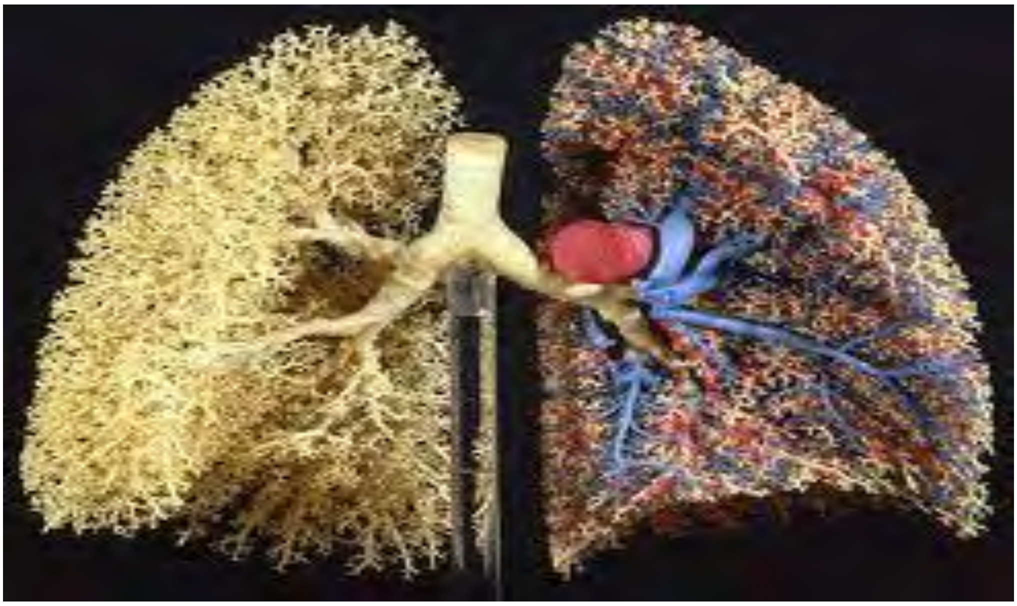
3.3 Εφαρμογή των κλασματοειδών σχημάτων (fractal) στη γεωμετρική προσέγγιση της φύσης

Τα σχήματα στη φύση θα μπορούσαν να προσεγγιστούν σαν κλασματοειδή σχήματα, ωστόσο στα φυσικά σχήματα η αυτοομοιότητα δεν είναι μαθηματικά ακριβής και η επαναληπτικότητα δε συνεχίζεται επ΄ άπειρο. Μπορούμε ωστόσο να θεωρήσουμε ότι τα φυσικά σχήματα:

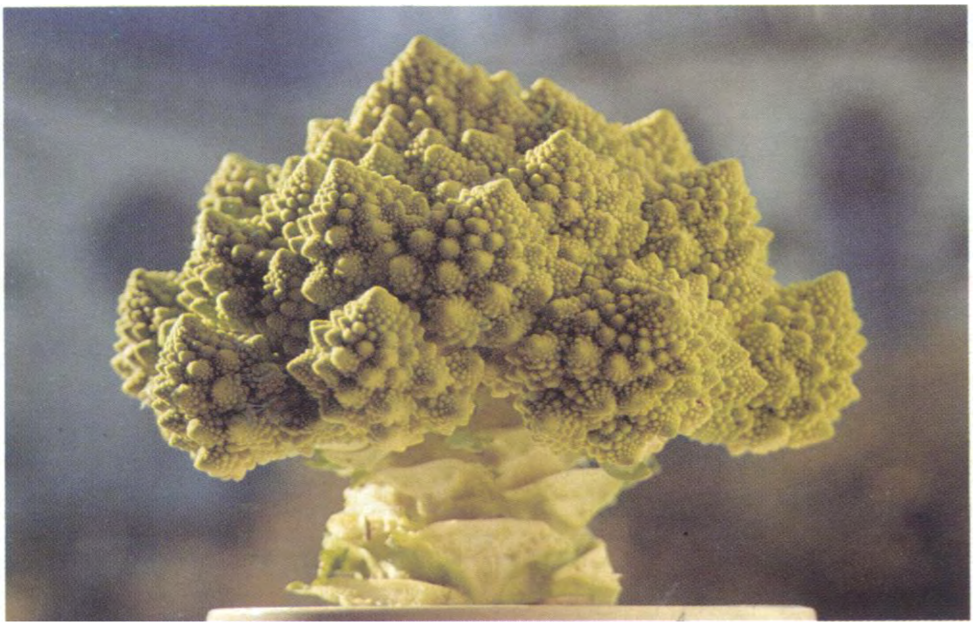
Α. Αντί για μαθηματικά ακριβή αυτοομοιότητα για κάθε φυσικό σχήμα, εμφανίζουν στατιστική αυτοομοιότητα για το σχήμα αυτό.

Β. Υπάρχει ανώτατο και κατώτατο όριο επανάληψης. (Ένας αυθαίρετος ορισμός των ορίων αυτών στην εξίσωση (7) θα μπορούσε να είναι για τα φυσικά fractal max/ε min >10, Nonnenmacher T. F. 1998).

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις μπορούμε να δώσουμε παραδείγματα σχημάτων που θα μπορούσαν να προσεγγιστούν σαν σχήματα fractal: Νέφη, ακτογραμμές, κύτταρα, δένδρα καθώς και εφαρμογές τους στην βιολογία ιατρική κ.λπ. (Mandelbrot B. B. 1967. Mandelbrot, B.B. 1983, Schröder, M. 1991). Για παράδειγμα οι εικόνες 5 και 6 (από το Mandelbrot, B.B. 1983):



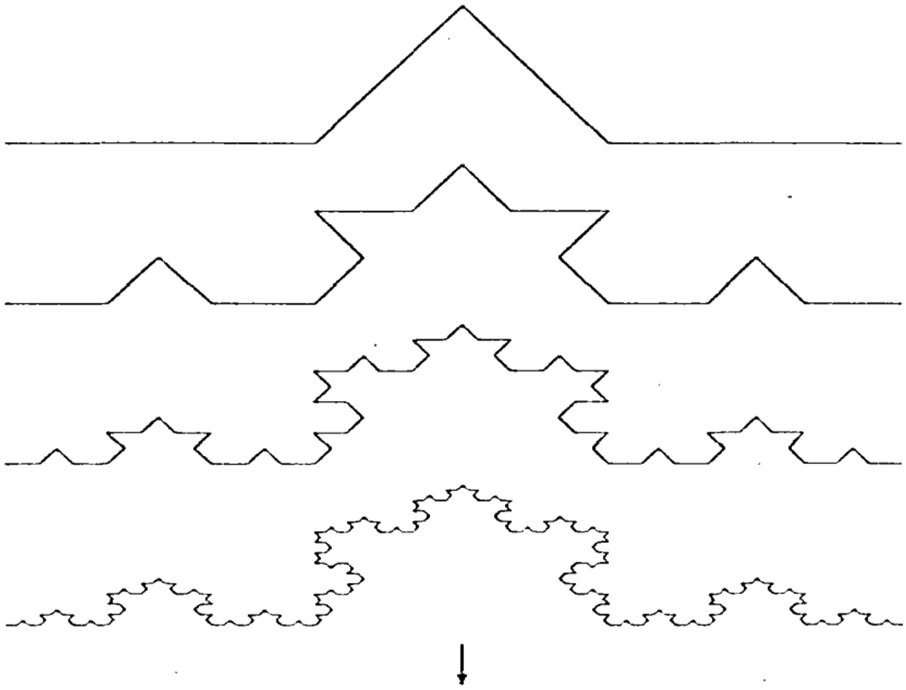
Εικόνα 5: Κλασματοειδής γεωμετρία και ανθρώπινοι πνεύμονες.



Εικόνα 6: Κλασματοειδής γεωμετρία και Broccoli Romanesco

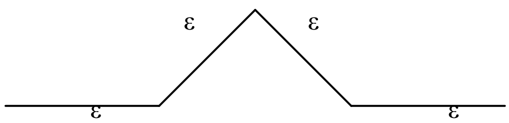
Προκύπτει βέβαια και το πρόβλημα της διάστασης αυτοομοιότητας των σχημάτων της φύσης που προσεγγίζονται σαν fractal. Για τα δέντρα θα μπορούσε να αποδοθεί διάσταση αυτοομοιότητας 1,5 για τα νέφη 1,3 κ.λπ. (H. Takayasu, 1990).

Σαν παράδειγμα ενός κλασματοειδούς σχήματος στην παραπάνω προσέγγιση σχημάτων της φύσης παρουσιάζεται εδώ το fractal von Koch (κεφάλαιο VII 1.12).

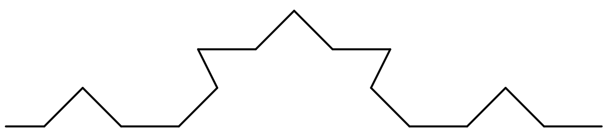


Εικόνα 7: Γραμμή von Koch

Πιο αναλυτικά, και όπως φαίνεται στην εικόνα 7, κάθε ένα από τα τρία ευθύγραμμα τμήματα του χωρίζεται ξανά σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα, το κεντρικό κομμάτι από κάθε νέο ευθύγραμμο τμήμα (ε) αντικαθίσταται κάθε φορά από δύο ε και ούτω καθεξής:



L=N(ε)ε Γεννήτρια (generator):

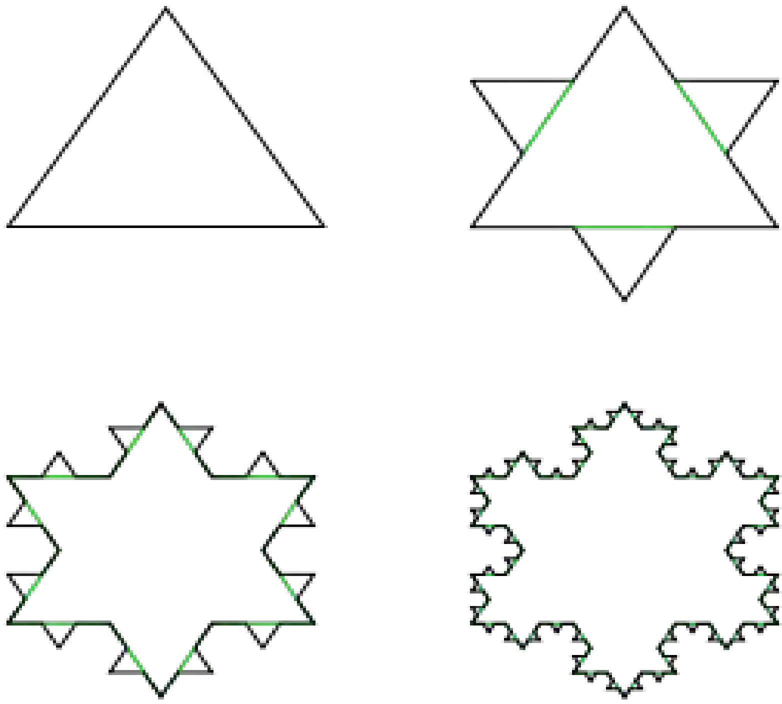


Iteration 1.

Οι επαναλήψεις (Iterations) της γεννήτριας μπορούν φυσικά να συνεχιστούν επ άπειρο. Η διάσταση αυτοομοιότητας από την εξίσωση (7) του σχήματος von Koch είναι:

$$D = \frac{\log(N)}{\operatorname{Log}(L/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \qquad =1{,}2618\ldots\ldots \text{με } \varepsilon=1/3 \quad N(\varepsilon)=4$$

Η διάσταση αυτοομοιότητας της γραμμής von Koch χρησιμοποιήθηκε στην εργασία μας (κεφάλαιο VII 1.12 β). Με τρεις γραμμές von Koch, μια από κάθε πλευρά του αρχικού ισόπλευρου τριγώνου σχηματίζεται η **χιονονιφάδα Von Koch**:



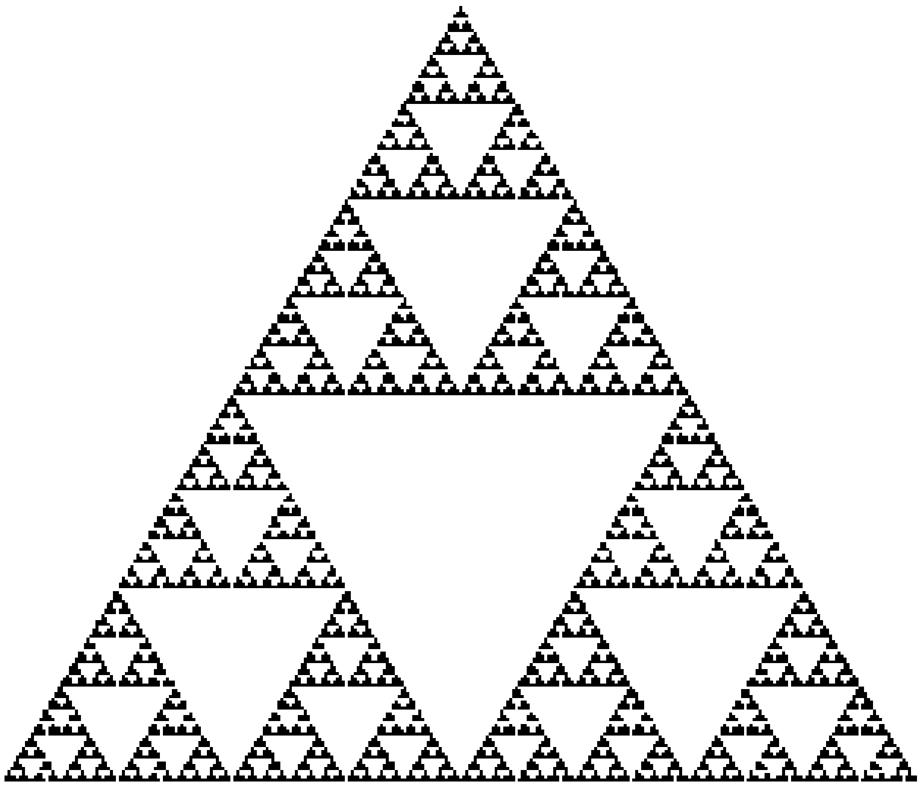
Εικόνα 8: Χιονονιφάδα von Koch

Το καλύτερο ίσως παράδειγμα εφαρμογής των ιδιοτήτων της γραμμής στην έρευνα στην βιολογία, είναι η επεξεργασία του περιγράμματος κυττάρων τύπου hairy λευχαιμίας ως προς την διάσταση αυτοομοιότητας (Nonnenmacher.T.F. et. al. 1996). Τα κύτταρα αυτά διαιρούμενα διατηρούν τη διάστασή τους αυτοομοιότητας στο D= 1,29. Η διάσταση αυτοομοιότητας του fractal von Koch είναι D= 1,26. Μελετώντας τους πολλαπλασιασμούς των κυττάρων με το μοντέλο περιγράμματος von Koch, είναι δυνατό κατά τους ερευνητές να προκύψει διάγνωση του καρκίνου αυτού (Nonnenmacher T. F. et. al. 1996).

3.4 Κλασματοειδή σχήματα στην εργασία μας.

Η πιο πάνω γραμμή von Koch όπως προαναφέρθηκε χρησιμοποιήθηκε στην εργασία μας. Ακόμη χρησιμοποιήθηκε ακόμη το τρίγωνο Sierpinski, η γραμμή Cantor και το σφουγγάρι Menger. Τα σχήματα που χρησιμοποιήσαμε αναφέρονται ξανά στο κεφάλαιο VII, κωδικός 1.12.

α. Τρίγωνο Sierpinski

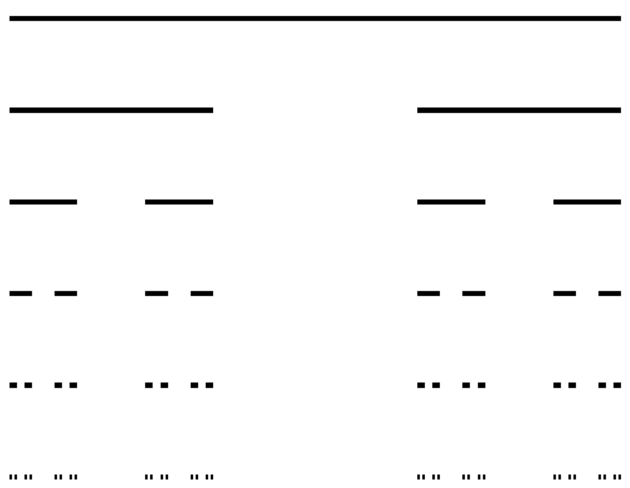


Εικόνα 9: Τρίγωνο Sierpinski

Το τρίγωνο Sierpinski (επινοήθηκε από τον Waclaw Sierpinski το 1915), και προκύπτει από ένα ισόπλευρο τρίγωνο στο εσωτερικό του οποίου δημιουργούνται συνεχώς όμοια με το αρχικό (βλ. εικόνα 9) τρίγωνα.

Έχει χρησιμοποιηθεί σχεδόν σε κάθε διδακτική προσέγγιση των fractal, κύρια στη διδασκαλία της αυτοομοιότητας (βλ. κεφάλαιο VII, κωδικός 1.10 και 1.12.α).

β. Γραμμή Cantor

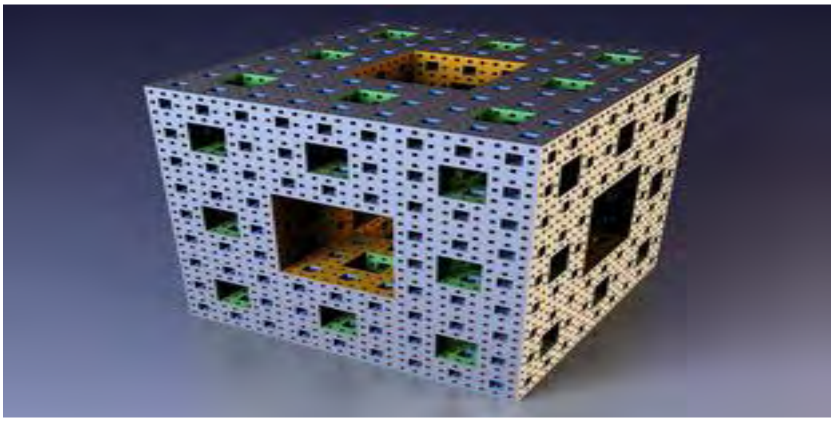


Εικόνα 10: Γραμμή Cantor

Η γραμμή Cantor (επινοήθηκε από τον Georg Cantor το 1883), παρουσιάζει την ιδιαιτερότητα ότι η διάσταση αυτοομοιότητας της είναι μικρότερη από ένα, ή πολύ απλά οι επαναλήψεις του διαχωρισμού της σε ευθύγραμμα τμήματα τείνουν σε ένα σύνολο σημείων (σκόνη του Cantor, βλ. κεφάλαιο VII 1.12.γ).

γ. Σφουγγάρι Menger

Το σφουγγάρι Menger (επινοήθηκε από τον Karl Menger το 1926), χρησιμοποιείται στην εργασία μας μόνο στην αξιολόγηση (τελικό τεστ ταξινόμησης σχημάτων κεφάλαιο VII. 1.12δ και κεφάλαιο XI.)



Εικόνα 10: Σφουγγάρι Menger

4. Εμβάθυνση στη θεωρία

Οι βασικές έννοιες της μη γραμμικότητας έχουν παρατεθεί στις προηγούμενες ενότητες II.2 και II.3, και η ενδεχόμενη επιλογή τους για διδακτική αξιοποίηση σε επόμενα στάδια αυτής της εργασίας δεν απαιτεί μεγαλύτερη εμβάθυνση στη θεωρία.

Ωστόσο η μέχρι τώρα εισαγωγή δεν αποδίδει σε καμιά περίπτωση το περιεχόμενο καθώς και τη σημερινή εξέλιξη της θεωρίας. Η προσέγγισή της από μια πιο εξειδικευμένη οπτική είναι απαραίτητη για την ολοκληρωμένη παράθεσή της, απαιτεί όμως πιο προχωρημένες γνώσεις θετικών επιστημών. Οι ίδιες σε γενικές γραμμές έννοιες και βασικές αρχές που δόθηκαν στην εισαγωγή των προηγούμενων ενοτήτων δίνονται τώρα ξανά, παρατίθενται όμως επιστημονικά πιο ολοκληρωμένα και με την έννοια αυτή είναι απαραίτητες στο πλαίσιο της παράθεσης της ανάπτυξης και της αισθητικής της θεωρίας (Peitgen H.O. et al. 1994., Gouyet, J-F. 1996).

4.1 Ευστάθεια δυναμικών συστημάτων

Η επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα 2. 3 συνήθως εξαιρετικά πολύπλοκη και δεν είναι πάντα δυνατό να γίνει αναλυτικά. Η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος μπορεί να παρασταθεί όμως γεωμετρικά ως μια συνεχής ροή στο χώρο των φάσεων. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε τις βασικές ιδιότητες του συστήματος με απλές γεωμετρικές έννοιες όπως σημεία ισορροπίας, περιοδικές τροχιές κ.α. Η μελέτη της συμπεριφοράς δηλ. της **ευστάθειας** του μη γραμμικού συστήματος στις περιοχές αυτές -περιοχές ειδικών λύσεων- μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για τη μακροπρόθεσμη εξέλιξη του συστήματος. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί με την εξέλιξη των Η.Υ. ένα νέο και ισχυρό εργαλείο μελέτης, σχετικά απλό και ιδιαίτερα αισθητικό στην γεωμετρική του σύλληψη.

4.2 Συντελεστές Liapunov.

Για κάθε απεικόνιση της μορφής

$Z_{k+1}=f(P_k)$ όπου Z_k ανήκει στο R^n

$f: R^n \to R^n$

η αριθμίσημη ακολουθία $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\ldots\ldots\ldots Z_\kappa$ ονομάζεται τροχιά του Z_0 κάτω από την f. Το σημείο Z_0 για το οποίο ισχύει $Z_0=f(z_0)$ ονομάζεται **σταθερό σημείο** (fixend point) της f. Το σημείο $Z_0= f^k (z_0)$, δηλαδή σταθερό σημείο κατά την k-φορές σύνθεση της f, ονομάζεται **περιοδικό σημείο** περιόδου k, και η τροχιά του k-περιοδική τροχιά της f (Devaney, R. L. 2003, Χατζηδημητρίου, Ι. 2010).

Η **ευστάθεια** (κατά Liapunov)των παραπάνω σημείων ορίζεται ως εξής:

Αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε άλλο Z'_0 που ανήκει στο R^n με

$|Z_0 - Z'_0|<\delta$ να ισχύει $|Z_0 - f^k(z'_0)|<\varepsilon$ για κάθε k>0. Με απλά λόγια η $f^k (z'_0)$ δηλ. η k-φορές σύνθεση της f παραμένει πολύ κοντά στο αρχικό σημείο Z_0. Αν επιπλέον ισχύει $f^k (z'_0)\to Z_0$, $k \to \infty$ τότε το σημείο Z_0 ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλ. με την εις άπειρο σύνθεση της f το σημείο Z_0 προσεγγίζεται, έλκει την τροχιά ασυμπτωτικά.

Για ένα σύνολο σημείων έλξης οι ορισμοί δίνονται ανάλογα:

Ένα κλειστό αναλλοίωτο σύνολο A ονομάζεται ελκτικό αν υπάρχει ανοιχτή γειτονιά U του A τέτοια ώστε με $f^n(z)$ να ανήκει στο U τότε για κάθε $n \rightarrow \infty$ να ισχύει $f^n(z) \rightarrow A$.

Οι περιοχές έλξης (basin of attraction), ή αντίστοιχα **άπωσης** (repeling) καθώς και πιο σύνθετες έννοιες της εξέλιξης των δυναμικών συστημάτων ορίζονται σε αντιστοιχία με τα παραπάνω (Devaney, R. L. 2003, Χατζηδημητρίου, I. 2010).

Αυτό που έχει σημασία στην εξέλιξη των δυναμικών συστημάτων είναι αν οι τροχιές παραμένουν «κοντά» η μια στην άλλη ή «απομακρύνονται» μεταξύ τους. Στην ουσία μιλάμε για μια ροή πιθανών τροχιών στον χώρο φάσεων, για την εξέλιξη ενός συνόλου (**ensemble**) δυναμικών συστημάτων. Είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε την εξέλιξη των ensemple έστω και κατά προσέγγιση.

Η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος γύρω από ένα σταθερό σημείο Z_0 μπορεί να προσεγγιστεί με ένα γραμμικό σύστημα με περατωμένες λύσεις για κάθε k>0.

Έστω ότι το γραμμικό αυτό σύστημα είναι το $\xi_{n+1}=A\,\xi_n$

$A=D\,(Z_0)$ ο ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης. Στην κατάλληλη βάση ο A διαγωνιοποιείται και γράφεται ως:

$$\tilde{A}= \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ \lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

δίνοντας εύκολα περατωμένες λύσεις στο δυναμικό μας σύστημα. Όταν ο A δεν διαγωνιοποιείται, οι μονάδες που εμφανίζονται έξω από τη διαγώνιο στη μορφή Jordan καταστρέφουν τη γραμμική ευστάθεια.

Οι ιδιοτιμές της διαγώνιου του πίνακα $\tilde{A}$ ονομάζονται **συντελεστές Liapunov** και στην ιδανική περίπτωση γραμμικής ευστάθειας $|\lambda_n| \leq 1$ οι ιδιοτιμές ορίζουν εύκολα και προβλέψιμα την εξέλιξη του συστήματος. Ειδικά αν οι ιδιοτιμές είναι $|\lambda_n| < 1$ η γραμμική ευστάθεια συνεπάγεται την ασυμπτωτική ευστάθεια Liapunov. Στην περίπτωση αυτή η λύση του γραμμικού συστήματος $\tilde{A}$ τείνει στο 0 για $k \to \infty$, το αντίστοιχο σημείο Z_0 είναι δηλαδή ελκτικό.

Η σημασία των συντελεστών Liapunov έγκειται στην προσπάθεια να μελετηθεί η εξέλιξη συστημάτων που κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες εμφανίζουν τροχιές που απομακρύνονται δραστικά η μια από την άλλη καθιστώντας κάθε προσπάθεια πρόβλεψης αδύνατη. Την ιδιότητα αυτή τη γνωρίσαμε στην ενότητα 2.2 σαν **ευαίσθητη εξάρτηση των συστημάτων** αυτών από τις αρχικές συνθήκες. Μπορούμε να δώσουμε σχετικά απλά τη φυσική σημασία των συντελεστών Liapunov (Komorek M. 1997, Μπούντης, Τ. 1997, Χατζηδημητρίου, Ι. 2010):

Αν η απόσταση δυο γειτονικών τροχιών κατά τον αρχικό χρόνο t=0 είναι $\varphi_2(0)- \varphi_1(0)$ μετρήσιμη και σχετικά μικρή, τότε η απόστασή τους $\varphi_2(t)- \varphi_1(t)$ σε χρόνο t είναι:

$$\varphi_2(t)- \varphi_1(t) =(\varphi_2(0)- \varphi_1(0))e^{\lambda t} =\varepsilon\, e^{\lambda t} \qquad (8)$$

Αν οι συντελεστές είναι $\lambda \geq 0$ τότε οι τροχιές που στις αρχικές συνθήκες t=0 ήταν κοντά, απομακρύνονται εκθετικά μεταξύ τους. Μια που οι συντελεστές Liapunov είναι μια γενική ιδιότητα του συστήματος ο ορισμός τους είναι καλύτερο να δίνεται ως εξής (Komorek M. 1997):

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{t} \ln \left(\varphi_2(t)- \varphi_1(t) \right)/\varepsilon \qquad (9)$$

Σε έναν n- διάστατο χώρο φάσεων υπάρχουν n συντελεστές Liapunov που δίνουν την διαγώνιο στον διαγωνιοποιημένο πίνακα $\tilde{A}$. Αν έστω και ένας συντελεστής είναι $\lambda \geq 0$ τότε όλο το σύστημα είναι **δυναμικά ασταθές** (Komorek M. 1997).

4.3 Αυτοομοιότητα και λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μη ακέραιο βαθμό.

Σε αναλογία με την αυτοομοιότητα των γεωμετρικών fractal, οι αυτοόμοιες συναρτήσεις $f(\lambda t)=\lambda^{\alpha} f(t)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις προσεγγίσεις λύσεων μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων (Nonnenmacher. T. F.1996, Schröder, M. 1991).

Αυτό βρίσκει εφαρμογή στον ορισμό του fractional Integral Operator Riemann

${}_aD^{r}_{x}\ f(x)$, όπου $r>0$ και μη ακέραιος αριθμός με $n-1<r\leq n$. (Στην Αγγλική χρησιμοποιείται ο όρος fractal για γεωμετρικές δομές και fractional για διαφορικές εξισώσεις, Nonnenmacher. T. F.1996.)

Το ερώτημα είναι αν υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις κλασματικής τάξης δηλ. αν υπάρχουν διαφορικά της μορφής :

$d^r/dx^r\ f(x)$ με r κλασματικό αριθμό.

Το 1695 ρώτησε ο Leibnitz τον De L΄Hospital αν το παραπάνω διαφορικό μπορεί να θεωρηθεί συνέχεια του $d^n/dx^n\ f(x)$ με n ακέραιο. Ο L΄Hospital ανταπάντησε (Mandelbrot B. B. 1983, Nonnenmacher. T. F.1996), τι είναι

$d^{1/2}/dx^{1/2}\ f(x)$?

Σήμερα, μια απάντηση που θα μπορούσε να δοθεί στο παραπάνω ερώτημα θα ήταν με χρήση της συνάρτησης $\Gamma(x)$, (ολοκλήρωμα Euler 1ου είδους):

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} y^{x-1}\ e^{-y}\ dy$$

Ως γνωστό για την παράγωγο μιας δυναμοσειράς έχουμε:

$$d^n x^m/dx^n = m!/(m-n)!\cdot x^{m-n} = \Gamma(m+1)/\Gamma(m-n+1)\cdot x^{m-n}$$

Αντικαθιστώντας n=1/2 und m=1 και με χρήση των ιδιοτήτων της $\Gamma(x)$:

1) $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$

2) $\Gamma(n+1)=n!$

έχουμε:

$$d^n x^m /dx^n = \Gamma(m+1)/\Gamma(m-n+1) \cdot x^{m-n} = \Gamma(2)/\Gamma(3/2) \cdot x^{1/2} = 2\sqrt{x}/\sqrt{\pi}$$

δηλαδή (Nonnenmacher. T. F. 1996) :

$$d1/2 /dx1/2 \ (x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Γενικεύοντας ανάλογα τον ορισμό του Riemann Integral Operator:

$$d^{-n} /dx^{-n} \ f(x) = 1/(n-1)! \cdot \int_{\alpha}^{x} (x-x')^{n-1} f(x') \, dx' \quad \text{με } n=1,2,3\ldots$$

μπορούμε να ορίσουμε τον Riemann fractional Integral Operator που προαναφέρθηκε:

$$d^{-r} /dx^{-r} \ f(x) = 1/\Gamma(r) \cdot \int_{\alpha}^{x} (x-x')^{r-1} f(x') \, dx' = {}_{\alpha}D^{-r}_{x} \ f(x) \text{ με } r > 0$$

Από το 1970 χρησιμοποιείται ο παραπάνω Operator στην θεωρητική φυσική, αναζητείται όμως κάποια φυσική εφαρμογή για τον ${}_{\alpha}D^{-r}_{x}$ με r μη ακέραιο αριθμό και στην πειραματική φυσική (Nonnenmacher. T. F.1996).

4.4.1 Δυναμικά συστήματα στη φυσική. Αδυναμία λύσης ενός συστήματος πολλών σωματιδίων.

Οι βασικές προϋποθέσεις των εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση ενός φυσικού συστήματος στην κλασική φυσική είναι η **αιτιοκρατία**:

Αρχική κατάσταση → εξισώσεις κίνησης → τελική κατάσταση

και η **αντιστρεψιμότητα**, (δηλαδή η ανεξαρτησία (Invarianz) στην μεταβολή

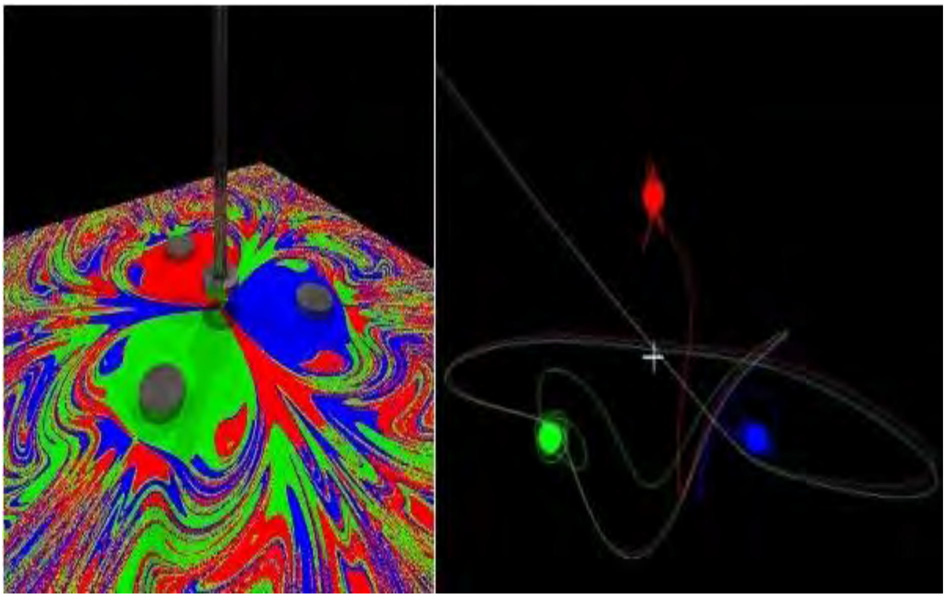
t → -t. Δηλαδή ισχύει η απεικόνιση (Stauffer, D. Stanley, H.E. 1996, Reineker, P. 2001 Μπούντης, Τ. 1997):

Τελική κατάσταση → εξισώσεις κίνησης → αρχική κατάσταση.

Τα τυπικά προβλήματα της μηχανικής και της κβαντομηχανικής αποτελούνται από συστήματα που αποτελούνται από λίγα σωματίδια. Ο αρμονικός ταλαντωτής, το άτομο υδρογόνου, το πρόβλημα Kepler είναι γνωστά προβλήματα ενός σώματος, οι διπλοί αστέρες ένα τυπικό παράδειγμα προβλήματος δύο σωμάτων. Με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος η μαθηματική περιγραφή του γίνεται περίπλοκη και το σύνολο των δυνατών λύσεων αυξάνεται δραματικά. Ήδη το πρόβλημα τριών σωμάτων σε βαρυτικό πεδίο για παράδειγμα, δεν έχει αναλυτική λύση (Χρηστίδης, Θ. 1997), το ίδιο συμβαίνει στο δυναμικό σύστημα του μαγνητικού εκκρεμούς με 3 πόλους.

4.4.2 Μαγνητικό εκκρεμές

Συγκεκριμένα το μαγνητικό αυτό εκκρεμές αποτελείται από τρεις ίδιους μαγνήτες στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, που έλκουν μαγνήτη με αντίθετο πόλο στην άκρη του νήματος αιώρησης. Η κίνησή του παρουσιάζει σε σημαντικό βαθμό ευαίσθητη **εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες** και είναι **χαοτική**. Η εσωτερική δομή της απεικόνισης του δυναμικού συστήματος χωρίζεται ωστόσο σε **περιοχές ευστάθειας και αστάθειας** και έχει σχήμα Y του οποίου οι ανοιχτές πλευρές δείχνουν τους πόλους. Η υφή της εσωτερικής δομής (βλ. εικόνα 11) παρουσιάζει αυτοομοιότητα (στο Komorek, M. 1997 και Peitgen et al. 1992 b). Το μαγνητικό εκκρεμές χρησιμοποιήθηκε σαν κύριο διδακτικό εργαλείο σε πολλές σχετικές έρευνες (Komorek, M. 1997, Skordoulis, C., 2005), όπως και στη διδακτική μας έρευνα (κεφάλαιο VI. 4).



Εικόνα 11. Η εσωτερική δομή του μαγνητικού εκκρεμούς με διαφορετικά χρώματα στους τρεις πόλους.

4.4.3 Στατιστική περιγραφή

Η περιγραφή συστημάτων με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας ή συστημάτων πολλών σωματιδίων αντίστοιχα είναι δυνατή μόνο στατιστικά (Stauffer, D. Stanley, H.E. 1996, Reineker, P. 2001). Η αποτυχία της κλασικής μηχανικής και της κβαντομηχανικής να περιγράψουν ένα σύστημα πολλών σωματιδίων οφείλεται σε δύο κυρίως λόγους:

Α. Αδυναμία επανάληψης των ίδιων πειραματικών συνθηκών.

Η δυνατότητα επανάληψης των πειραματικών συνθηκών αποτελεί θεμέλια αρχή για την μηχανική. Ισοδύναμα, η ακρίβεια της μεθόδου προετοιμασίας των πειραματικών συνθηκών οφείλει να αντιστοιχεί στην ακρίβεια μέτρησης. Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή για παράδειγμα η τροχιά q_i καθώς και η ορμή $p_i = dq_i/dt$ δίνουν λύση στο σύστημα που περιγράφει την κίνηση αρμονικού ταλαντωτή με αρχικές συνθήκες q_0 και p_0 για t=0 :

$$q(t)= q_0 \cos \omega t + p_0/m\omega * \sin \omega t \quad \text{και} \quad p(t) = p_0 \cos \omega t - q_0\, m\omega * \sin \omega t$$

Με μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες $q_0+\delta q_0$ και $p_0+\delta p_0$ αντίστοιχα, λόγω ενδεχόμενης ανακρίβειας στη μέτρηση ή προετοιμασία του πειράματος, κατά την επανάληψη του η τροχιά (λύση) δεν θα αντιστοιχεί στην q(t), p(t) πια, αλλά θα παρουσιάζει μια απόκλιση δΓ. Για ένα διάνυσα **Γ** που περιλαμβάνει όλες τις γενικές συντεταγμένες και ορμές του συστήματος:

$\Gamma=(t,q_1.....s,p_1.....p_{as})$,

μπορεί να αποδειχθεί για την απόκλιση αυτή **δΓ** ότι αυξάνεται εκθετικά:

$$|\boldsymbol{\delta\Gamma}| \sim e^{\Re\max(\lambda i\ t)}|\boldsymbol{\delta\Gamma}(0)|$$

λ_i είναι οι **εκθέτες Liapunov** του συστήματος που αναφέρθηκαν στην ενότητα 4.1. Για αρκετά μεγάλους χρόνους επηρεάζει την χρονική εξέλιξη γειτονικών τροχιών **δΓ** ο συντελεστής Liapunov με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Πολύ μικρές αποκλίσεις στις τροχιές γειτονικών σωματιδίων μεγαλώνουν με το χρόνο δραστικά. Ένα τέτοιο σύστημα είναι **χαοτικό** (Reineker, P. 2001).

Αυτό σημαίνει ότι η πειραματική επανάληψη της εξέλιξης ενός συγκεκριμένου συστήματος πολλών σωματιδίων είναι αδύνατη. Ή ότι ισοδύναμα ένα σύστημα πολλών σωματιδίων δεν είναι αντιστρέψιμο. Με την έννοια αυτή η συμπεριφορά του συστήματος πολλών σωματιδίων είναι εξ ορισμού χαοτική.

Για να αποκλειστεί χαοτική συμπεριφορά σε ένα σύστημα πολλών σωματιδίων θα πρέπει κάθε συντελεστής Ljapunov να έχει πραγματικό μέρος $\Re\lambda i = 0$. Ένα σωματίδιο όμως με οποιαδήποτε αλληλεπίδραση με άλλο σωματίδιο έχει πάντα $\Re\lambda i \neq 0$, επομένως **το χάος** σε ένα σύστημα πολλών σωματιδίων είναι **εγγενές**.

Β. Έλλειψη ικανών αλγόριθμων λύσης για συστήματα πολλών σωματιδίων.

Η λύση ενός συστήματος από s βαθμούς ελευθερίας (q_i θέση, p_i ορμή, σωματιδίου στο διάγραμμα φάσης), είναι της γενικής μορφής :

$$\{q_i(t, q_1(0).....s(0),p_1(0).....p_{as}(0)),\ p_i(t, q_1(0).....s(0),p_1(0).....p_{as}(0))\}$$

η οποία και για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες $\{q_\iota(0),\ p_\iota(0)\}$ είναι ακριβής λύση για 2s βαθμούς ελευθερίας $\{q_\iota,\ p_\iota\}$. Η λύση είναι δύσκολη αλλά με τη βοήθεια των σημερινών υπολογιστών μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά (numerisch) για ένα σύστημα με 10^6 έως 10^8 βαθμούς ελευθερίας. Ακόμη και έτσι όμως οι βαθμοί ελευθερίας ενός μακροσκοπικού συστήματος είναι ασύγκριτα περισσότεροι, καθιστώντας το μαθηματικό και τεχνικό μας εργαλείο προς το παρόν τραγικά ανεπαρκές (Reineker, P. 2001). Ένα γραμμάριο υδρογόνου αποτελείται από περίπου $3*10^{23}$ σωματίδια. Η ακριβής περιγραφή ενός τέτοιου συστήματος είναι αδύνατη.

Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι ακόμη και για ένα φυσικό σύστημα με περιορισμένους βαθμούς ελευθερίας η εύρεση λύσης δεν είναι πάντα αναλυτικά εφικτή. Μια πολυωνυμική εξίσωση του τύπου

$F(x)^4=x$

είναι εξίσωση 16ου βαθμού με 16 ρίζες. (Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει αναλυτική μέθοδος λύσης για ένα πολυώνυμο μεγαλύτερου του 4ου βαθμού, Devaney, R.L. 1990). Η λύση προσεγγίζεται αριθμητικά.

4. 4. 4 Στατιστική επίλυση δυναμικών συστημάτων

Η εξέλιξη ενός συνόλου δυναμικών συστημάτων (Ensemble) μετά τα παραπάνω έπεται ότι μπορεί να αποδοθεί μόνο στατιστικά. Για την στατιστική περιγραφή των Ensemble ισχύει ένα βασικό αξίωμα (**εργοδική υπόθεση**, Ergodizitätshypothese):

Για κάθε αρκετά μεγάλο φυσικό σύστημα αλληλοεπιδρώντων σωματιδίων, είναι δυνατό να προσεγγιστεί κάθε σημείο στο χώρο φάσης απειροστικά κοντά.

Η υπόθεση αυτή κάνει τουλάχιστον δυνατή την στατιστική περιγραφή του συστήματος.

Η εξίσωση Liouville (9) επιτρέπει για ένα συντηρητικό τουλάχιστον σύστημα μελέτη της εξέλιξης των Ensemble. Στην περίπτωση που το σύστημα είναι συντηρητικό (δηλαδή σύστημα όπου η συνολική ενέργεια – π.χ. κινητική των υλικών σημείων του- παραμένει σταθερή), ο όγκος των τροχιών των Ensemble στον χώρο των φάσεων παραμένει σταθερός.

$$d\rho(\Gamma,t)/dt + \{\rho(\Gamma,t), H\}=0 \qquad (9)$$

Άμεση απόρροια της εργοδικής υπόθεσης είναι το θεώρημα **αναστρεψιμότητας του Poincare**:

Κάθε απομονωμένο σύστημα (Ensemble) μπορεί μέσα σε ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα να επιστρέψει στην κατάσταση εκκίνησής του οσοδήποτε κοντά.

Το θεώρημα αναστρεψιμότητας του Poincare με την παραπάνω ή με άλλες ισοδύναμες διατυπώσεις, σαν συνέπεια της απώλειας πληροφορίας (εντροπίας πληροφορίας) για την κίνηση του συστήματος, φαίνεται να έρχεται σε αντίφαση με τη μη αντιστρεψιμότητα στον χώρο των φάσεων όπως δόθηκε στην αρχή της ενότητας 4.3. Φαίνεται ότι για απεριόριστα μεγάλο χρονικό διάστημα η ανάκτηση έστω ενός ελάχιστου της πληροφορίας είναι κατ αρχάς δυνατή (Reineker, P. 2001).

Η αντίφαση όμως αυτή είναι φαινομενική, η επιστροφή ενός Ensemble στην κατάσταση εκκίνησής του προϋποθέτει απόλυτη απομόνωση του φυσικού συστήματος από το περιβάλλον. Έστω και η παραμικρή αλληλεπίδραση ενός σωματιδίου με το περιβάλλον οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας και καθιστά την επιστροφή στην κατάσταση εκκίνησης αδύνατη. Αντίθετα η παραμικρή αλληλεπίδραση σωματιδίου με το περιβάλλον οδηγεί μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα στη διάχυση του Ensemble σε ολόκληρο τον χώρο φάσεων (Reineker, P. 2001).

ΚΕΦ. III

Επιλογή μεθοδολογίας

1. Ερευνητικός στόχος και επιλογή μεθοδολογίας

1.1 Επιλογή στοιχείων της θεωρίας για τη διδακτική έρευνα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρατέθηκε η εισαγωγή στη θεωρία της μη γραμμικότητας στα μαθηματικά και φυσική, αλλά και μια σύντομη ιστορική αναδρομή της. Στο σύνολό τους τα παραπάνω είναι αδύνατο να διερευνηθούν όλα για διδακτική αξιοποίηση, αυτό δεν είναι όμως και απαραίτητο, γιατί όπως διαπιστώθηκε στο κεφάλαιο II τα βασικά στοιχεία της θεωρίας επαναλαμβάνονται σε κάθε θεωρητική της προσέγγιση (κεφάλαιο II. 3,4,5) τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική και περιλαμβάνουν:

1. **Την αδυναμία πρόβλεψης και την ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες** στην εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος (**χαοτική συμπεριφορά**), αλληλένδετη όμως με την ύπαρξη εσωτερικής δομής στα σύστημα αυτά.
2. Την έννοια της **επαναληπτικότητας** (iteration) και της **αυτοομοιότητας** (self similarity).
3. Τη σημασία της μη γραμμικότητας στην περιγραφή της φύσης.
4. **Τα κλασματοειδή (fractal) σχήματα**, τη σχέση τους με την απεικόνιση της εξέλιξης των δυναμικών συστημάτων και την έννοια της **διάστασης αυτοομοιότητάς τους**.

Σύμφωνα με τις παραμέτρους που ορίστηκαν στην αρχή του κεφαλαίου II.1, η στοιχειοθεσία της θεωρίας για τη διδακτική της έρευνα στη συνέχεια, πρέπει να περιλαμβάνει όλες τις παραπάνω βασικές έννοιες, που είναι απαραίτητες για λόγους πληρότητας της θεωρίας (ο πυρήνας της θεωρίας). Τα παραπάνω αναφέρονται μερικά ή ολικά και σε άλλες σχετικές έρευνες (Peitgen, H. O. 1992 a, b, Komorek, M. 1997 Marny F., Sylvia L. 1991) και αποτελούν τους βασικούς γνωστικούς στόχους της προσπάθειας μας διδακτικής αξιοποίησης στο πλαίσιο της κεντρικής ιδέας της.

1.1.2 Ερευνητικός στόχος

Στόχος μας είναι η διερεύνηση της δυνατότητας διδακτικής αξιοποίησης εννοιών της μη γραμμικότητας στη γενική εκπαίδευση. Πιθανή επιβεβαίωση της δυνατότητας αυτής θα οδηγήσει σε μια πρόταση διδακτικής αξιοποίησης, η οποία θα περιλαμβάνει συγκεκριμένη πρόταση διδασκαλίας στο μάθημα των μαθηματικών σε μια ή περισσότερες βαθμίδες της γενικής εκπαίδευσης. Οι προτάσεις αυτές θα πρέπει να εντάσσονται αρμονικά στο γενικότερο διαθεματικό πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών και να είναι συμβατές με τους σκοπούς και στόχους της γενικής εκπαίδευσης.

1. 2 Επιλογή μεθοδολογίας

Στο πλαίσιο του στόχου της έρευνάς μας, περιλαμβάνονται η διερεύνηση της διδακτικής αξιοποίησης των εννοιών της μη γραμμικότητας που αναφέρθηκαν, καθώς και ο πιθανός διδακτικός ανασχηματισμός των εννοιών αυτών. Ακόμη περιλαμβάνεται ο συνεχής έλεγχος και η ανατροφοδότησή τους και τέλος η κατάληξη σε συγκεκριμένη πρόταση. Το πλαίσιο αυτό προκαθορίζει εξ αρχής μια διαχρονική εμπειρική διερεύνηση. Η διερεύνηση αυτή θα πρέπει να έχει πολλαπλή υφή, περιλαμβάνοντας έρευνα, ανάλυση και διδακτική εφαρμογή. Κατά τη διάρκεια της οφείλει να πραγματοποιείται συνεχής ανάλυση των δεδομένων όπως προκύπτουν από την εμπειρική έρευνα και διαδοχική βελτίωση της πρότασης διδασκαλίας με άμεσο έλεγχο της νέας εφαρμογής της. Είναι φανερό ότι η παραπάνω διερεύνηση είναι ευρύτατη ως προς τα επιμέρους της στάδια και εκτενής χρονικά, πράγμα που καθιστά αναγκαία τη χρήση περισσότερων από μιας μεθόδους έρευνας. Ένας ακόμη παράγοντας που συνηγορεί στην μικτή έρευνα, είναι ότι ο στόχος της έρευνας αν και δεν είναι πρωτότυπος, δεν παύει να είναι στο σύνολό του μια νέα αδοκίμαστη προσπάθεια στο χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας. Άλλωστε πολλαπλές μεθοδολογικές προσεγγίσεις στα πλαίσια πάντα του ίδιου ερευνητικού στόχου (τριγωνοποίηση) συμβάλουν σημαντικά στην εγκυρότητα και αντικειμενικότητα μιας εκτεταμένης έρευνας (Cohen L. Manion L 1997, Johnson, B., Christensen, L. 2008).

Στο αρχικό στάδιο της έρευνας η επιλογή της μεθοδολογικής προσέγγισης λόγω της σχετικής πρωτοτυπίας και της πολλαπλής υφής του ερευνητικού στόχου που αναφέρθηκαν, δεν ήταν δυνατόν να είναι προκαθορισμένη. Η στρατηγική μας δεν περιορίστηκε σε απλή συλλογή και ανάλυση δεδομένων, αλλά προσανατολίστηκε σε πιο ενεργό και συμμετοχικό ρόλο του ερευνητή, προκειμένου να αναδειχθεί με το πρώτο στάδιο της έρευνας η ενδεικνυόμενη στη συνέχεια μεθοδολογική προσέγγιση και ενδεχόμενα η επακόλουθη διδακτική πρόταση. Αυτό ίσχυε ειδικά στο εμπειρικό μέρος της έρευνας όπου ήταν αναγκαίες διδακτικές παρεμβάσεις σε κάποια βαθμίδα εκπαίδευσης. Η αρχική στρατηγική μας προσανατολίστηκε για τον λόγο αυτό σε κάποια μορφή έρευνας δράσης (Cohen L. Manion L 1997).

Το πλαίσιο της έρευνας μας συμπεριλάμβανε περισσότερα στάδια, ξεκινώντας από μια μη συμμετοχική διερεύνηση, συλλογή δεδομένων και ερμηνεία τους και καταλήγοντας με συμμετοχική διερεύνηση και βαθμιαία διαμόρφωση μιας πρώτης διδακτικής πρότασης, και τελικά σε διδακτική παρέμβαση και στην αξιολόγησή της. Η έρευνα δράσης προσφέρθηκε για το πρώτο στάδιο της ερευνάς μας λόγω της ευελιξίας και αμεσότητας της πρακτικής της. Ακόμη συγκεκριμενοποίησε το πρόβλημά μας σε μεγάλο βαθμό, καθορίζοντας τα επόμενα στάδια μεθοδολογικής προσέγγισης που ακολούθησαν, προκαθορίζοντας γενικά και τον απαιτούμενο χρόνο της όλης προσπάθειας. Τα παραπάνω ανταποκρίνονται στον συμβατικό ορισμό έρευνας δράσης (Cohen L. Manion L., 1997), **δηλαδή έρευνα δράσης σαν μια διαγνωστική και θεραπευτική προσέγγιση στο πρόβλημα του ερευνητικού στόχου**. Κατά την εξέλιξη της διερεύνησης και μετά την εξαγωγή των πρώτων συμπερασμάτων από την έρευνα δράσης, καθίσταται πολύ πιθανή η ανάγκη χρήσης συστηματικότερης μεθοδολογικής προσέγγισης όπως συνέβη και στη συνέχεια της έρευνάς μας.

Για τους παραπάνω λόγους στο πρώτο στάδιο της έρευνάς μας εφαρμόσαμε έρευνα δράσης. Σε επόμενα κεφάλαια παρατίθενται τα επόμενα στάδια της έρευνας όπως προέκυψαν κατά την εξέλιξη της διερεύνησής μας, καθώς και οι επόμενες μεθοδολογικές προσεγγίσεις που εφαρμόστηκαν διαδοχικά.

2. Έρευνα δράσης σαν διαγνωστική προσέγγιση στο πρόβλημα του ερευνητικού στόχου

Σύμφωνα με την ερευνητική μεθοδολογία ένα γενικό σχέδιο έρευνας δράσης στην εκπαίδευση περιλαμβάνει τις εξής διαδοχικές διαδικασίες (Cohen L. Manion L., 1997):

1. Διατύπωση του προβλήματος.
2. Πρώτες προτάσεις, επαφές με τους εμπλεκόμενους φορείς.
3. Επισκόπηση βιβλιογραφίας.
4. Καθορισμός πρόταση αλλαγής ή παρέμβασης στο αναλυτικό πρόγραμμα.
5. Οργάνωση της έρευνας, χρήση μέσων και προσωπικού.
6. Διαδικασίες αξιολόγησης.
7. Εφαρμογή προγράμματος.
8. Ερμηνεία δεδομένων εξαγωγή συμπερασμάτων.

Στην περίπτωσή μας οι παραπάνω διαδικασίες της έρευνας δράσης συγκεκριμενοποιούνται ως εξής:

2.1 Διατύπωση του προβλήματος, αναγκαιότητα και δυνατότητα εφαρμογής.

Ο ερευνητικός στόχος μας καθώς και οι αρχικά επιδιωκόμενοι γνωστικοί στόχοι μιας πιθανής πρότασης διδασκαλίας διατυπώθηκαν με γνώμονα την πληρότητα της θεωρίας στην αρχή του κεφαλαίου αυτού. Όπως προαναφέρθηκε (κεφάλαιο II. 1.1) ωστόσο, η πρώτη και κυριότερη παράμετρος της επιλογής για διδακτική έρευνα δεν είναι η πληρότητα της θεωρίας αλλά η αναγκαιότητα και η δυνατότητα της διδασκαλίας των επιλεγμένων εννοιών της θεωρίας σε συγκεκριμένη βαθμίδα και τάξη της γενικής εκπαίδευσης. Γι' αυτόν τον λόγο συνοψίζουμε εδώ τα κυριότερα επιχειρήματα για την αναγκαιότητα και δυνατότητα της διδασκαλίας της μη γραμμικότητας, όπως έχουν διατυπωθεί και σε προηγούμενες έρευνες:

1. Έως τώρα, η γραμμικότητα στην προσέγγιση των θετικών επιστημών αποτελούσε το υπόβαθρο της διδακτικής τους στη γενική εκπαίδευση. Αυτό είναι εύλογο αφού αυτό ήταν και είναι το κυρίαρχο παράδειγμα της μαθηματικής προσέγγισης στη φύση. Η ανάδειξη όμως της μη γραμμικότητας και η μελέτη της, καθιστά πλέον αναγκαία τη διδακτική αξιοποίηση και εισαγωγή της στη γενική εκπαίδευση (Peitgen, H.O. Hartmut, J. Saupe, D. Maletsky, E. Perciante, T. Yunker, Lee. 1999. Mandelbrot, B., 1983, Peitgen, H. O. 1992a, Stauffer, D. Stanley, H.E. 1996, Komorek, M. 1997. Komorek, M. Duit, R. 2004, Komorek, M. Duit, R. 2001, Devaney R.L. 2003, Marny F., Sylvia L. 1991, Χατζηκυριάκου, Κ. 2004, Σταύρου 2013).

2. Η μη γραμμικότητα αν και δεν αποτελεί επιστημολογικό «παράδειγμα», δεν παύει να είναι η σημερινή άποψή μας για τις θετικές επιστήμες και για τον κόσμο γενικότερα (Mandelbrot, B., 1983, Komorek, M. 1997). Δεν μπορεί να έχει διαπιστωθεί και να έχει γίνει αποδεκτή σήμερα μια νεότερη επιστημονική προσέγγιση και να συνεχίζουμε να διδάσκουμε μόνον την παλαιότερη και περιορισμένη προσέγγιση της γραμμικότητας στη γενική εκπαίδευση, χωρίς έστω μια εισαγωγή στη σύγχρονη οπτική. Σύμφωνα μάλιστα με το National Council of Teachers of Mathematics στις Η.Π.Α (N.C.T.M.1988-1989), η παραπάνω προσέγγιση αποτελεί μια νέα γλώσσα των μαθηματικών για την κατανόηση της φύσης με σημαντική μεταγνωστική μεταφορά της στην καθημερινή ζωή (Hartmut, J. Peitgen, H.O. Saupe, D. 1989, Peitgen, H.O. et al. 1992a,b. Marny F., Sylvia L. 1991).

3. Εξάλλου η μη γραμμική προσέγγιση προσφέρει έξοχο πεδίο διαθεματικής αξιοποίησης και ολοκλήρωσης αναλυτικών προγραμμάτων διδασκαλίας θετικών επιστημών. Η χρησιμότητα της μη γραμμικής προσέγγισης στο σημείο αυτό τονίζεται στη βιβλιογραφία (Δάλλα Λ., Δρακόπουλος Β., Boehm A. 1995, Barnsley, 1993, Komorek, 2004). Στο πλαίσιο πάντα του ερευνητικού μας στόχου, πέρα από τα μαθηματικά, οι δυνατότητες διαθεματικής αξιοποίησης της μη γραμμικής προσέγγισης στην εργασία μας, αφορούν κύρια τη φυσική, την πληροφορική και την αισθητική αγωγή.

4. Πολλά στοιχεία της κλασματοειδούς (fractal) γεωμετρίας, (τρίγωνο Sierpinski, γραμμή von Koch κ.α.) αποτελούν εξέλιξη γνωστών στους μαθητές

σχημάτων και εντοπίζονται εύκολα στο άμεσο περιβάλλον των μαθητών. (Peitgen H.O. et al, 1992a, Zeitler, H., Neidhardt, W. 1994, Barnsley, M. F.1993, Peitgen H.O. et al.1986. Γούναρης, Β. 2005, 2011, Karakuş, F. 2015). Το τρίγωνο Sierpinski ειδικότερα συνδέεται με τη μη γραμμική (χαοτική) εξέλιξη δυναμικού συστήματος *(το παιχνίδι του χάους*, κεφάλαιο VII 1.1 και Χ.1).

2. 2 Πρώτες προτάσεις, επαφές με τους εμπλεκόμενους φορείς.

Μετά από τη σχετική βιβλιογραφική έρευνα, διαπιστώθηκε ένα πλήθος προτάσεων διδακτικής αξιοποίησης της μη γραμμικότητας στην εκπαίδευση διαφορετικών χωρών.

Στο πλαίσιο αυτό σημαντικές ήταν οι επαφές και ανταλλαγές απόψεων με συναδέλφους ερευνητές και εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και πανεπιστημιακούς φορείς σε Ελλάδα και Γερμανία. Οι επαφές αυτές είχαν σαν αποτέλεσμα διδακτική παρέμβαση μας σε σχολεία υπό την αιγίδα των πανεπιστήμιων αυτών σε Ελλάδα και Γερμανία. Με την οριστικοποίηση των σχεδίων της έρευνας μας κατατέθηκε σχετική πρόταση στο παιδαγωγικό ινστιτούτο του υπουργείου παιδείας προς έγκριση. Με τον τρόπο αυτό αφενός μεν ενισχύθηκε η εγκυρότητα της έρευνας, κατέστη δε δυνατή η πρόσβαση στα σχολεία γενικής εκπαίδευσης για την έρευνά μας.

2. 3 Βιβλιογραφική επισκόπηση για παρόμοιες έρευνες

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω πραγματοποιήθηκε διερεύνηση στη βιβλιογραφία για ανάλογες προσπάθειες διδακτικής αξιοποίησης της μη γραμμικότητας σε διάφορες χώρες. Η διερεύνηση στη βιβλιογραφία ανέδειξε ελάχιστες έρευνες για μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (ενδεικτικά Nesbitt, V, N. 1992). Ανέδειξε ακόμη πολλές εξειδικευμένες έρευνες που δεν αφορούν τη γενική εκπαίδευση (Devaney, R. 1990, Marny F. Sylvia L., 1991) ή έρευνες που αφορούν αποκλειστικά σπουδαστές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (Kaye, B. H. 1994, Couyet, J-F. 1996).

Στη γερμανική βιβλιογραφία εντοπίζονται αρκετές αναφορές για τη διδακτική αξιοποίηση της μη γραμμικότητας και στη μέση εκπαίδευση (Behr, R.

1994, Weber, S. M 1994, Nemirovsky, R. 1993). Ωστόσο οι παραπάνω έρευνες αναφέρονται κύρια στο επιστημονικό πλαίσιο και ελαχιστοποιούν τη σημασία της διδακτικής στις προτάσεις τους (Komorek, M. 1997). O Komorek, προσέφερε σημαντικά στη διερεύνηση του πεδίου αυτού στην Γερμανία, ειδικότερα στη διερεύνηση των απόψεων των μαθητών του γερμανικού λυκείου για τις παραπάνω έννοιες, καθώς και στη διδακτική ανακατασκευή της θεωρίας αιτιοκρατικού χάους για τη διδασκαλία στο μάθημα της φυσικής της 10ης τάξης του γερμανικού σχολείου. Σημειώνεται ότι η γερμανική πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση (gymnasium) διαρκεί συνολικά 13 έτη, και με την έννοια αυτή το επίπεδο των Γερμανών μαθητών της 10ης τάξης που διερευνήθηκε δεν απέχει πολύ από το επίπεδο της Γ΄ τάξης του γυμνασίου στην Ελλάδα. Πρωτοπόρα, σημαντική και πολύπλευρη είναι ακόμη η πρόσφορά της ομάδας μαθηματικών Peitgen, H. O. et al οι οποίοι αναφέρονται σε όλο το φάσμα της μη γραμμικότητας, για διδακτική αξιοποίηση στη διδασκαλία στο μάθημα των μαθηματικών στις Η.Π.Α. (Peitgen, H. O. et al, 1992a, 1992b).

Ο Σταύρου Δ. διερεύνησε τη δυνατότητα διδασκαλίας μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων (Σταύρου Δ., 2005, 2008, 2014). Στην ίδια κατεύθυνση και σε συνεργασία με τους Ασημόπουλο Σ. και Σκορδούλη Κ. στο πλαίσιο της διδακτικής σύγχρονων θεωριών φυσικής, εργάστηκαν με φοιτητές Π.Τ.Δ.Ε (Ασημόπουλος Στ., Σταύρου Δ. & Σκορδούλης Κ. 2009., Stavrou, D., Assimopoulos, S. & Skordoulis, C. 2013). Οι Δρακόπουλος Β. και Ευαγγελάτου-Δάλλα Λ. από το πανεπιστήμιο Αθηνών διερεύνησαν κύρια τη χρησιμότητα εφαρμογής στη διδασκαλία των κλασματοειδών σχημάτων fractal (Δάλλα Λ., Δρακόπουλος Β., Boehm A. 1995). Στο πλαίσιο αυτό εκπονήθηκαν πολλές εργασίες στο μάθημα *γεωμετρία των fractal*, στο μεταπτυχιακό του παν. Αθηνών (Βισκαρουδάκης Β., Σουγιούλ Αλ. 1999, Ορφανίδου, Μ. 1999. κ.α.) και Θεσσαλονίκης (Γούναρης, Β. 2003) που παρουσιάζουν ειδικότερο ενδιαφέρον για την έρευνά μας.

Σχετικές διδακτικές προτάσεις διερευνώνται τα τελευταία χρόνια σε Ελλάδα και εξωτερικό (Δάλλα Λ., Δρακόπουλος Β., Behm A. 1995., Komorek, 2004, Βισκαρουδάκης Β., Σουγιούλ Αλ. 1998. Ορφανίδου, Μ. 1999. Stavrou, D. 2008 Karakuş, F. 2015). κ.α.) Τα αποτελέσματα είναι γενικά ενθαρρυντικά.

Ανεξάρτητα από την εξειδίκευση κάθε έρευνας, κοινή είναι η διαπίστωση της ισχυρής εντύπωσης της μη γραμμικής προσέγγισης στους μαθητές όλων των χωρών.

2.4. Καθορισμός πρότασης αλλαγής ή παρέμβασης στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Παρέμεινε ανοιχτό στο σημείο αυτό το ερώτημα της βαθμίδας εκπαίδευσης και της συγκεκριμένης τάξης στην οποία θα πραγματοποιούνταν η διαμόρφωση της δικής μας διδακτικής πρότασης. **Για το λόγο αυτό η αρχική έρευνα δράσης μας εφαρμόστηκε τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση** και πραγματοποιήθηκαν διδακτικές παρεμβάσεις και στις δυο βαθμίδες εκπαίδευσης.

Η σειρά των διαδοχικών διαδικασιών της έρευνας δράσης που αναφέρθηκαν πιο πάνω στην αρχή της ενότητας 2, διατηρήθηκε στην έρευνά μας.

Οι πρώτες τέσσερις διαδικασίες της έρευνας δράσης (διατύπωση προβλήματος, πρώτες προτάσεις, επισκόπηση βιβλιογραφίας, απόφαση παρέμβασης σε πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια) παρατέθηκαν πιο πάνω.

Οι τελευταίες τέσσερις διαδικασίες όμως (οργάνωση, αξιολόγηση, εφαρμογή, εξαγωγή συμπερασμάτων), διαφοροποιήθηκαν σημαντικά στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παρατίθενται χωριστά για την πρωτοβάθμια στα κεφάλαια IV. 1 -4 και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στα κεφάλαια V. 1 -4 που ακολουθούν.

ΚΕΦ. IV

Πρώτη φάση έρευνας δράσης. Έρευνα δράσης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

1. Οργάνωση της έρευνας, χρήση μέσων.

Ως πρώτο βήμα στην οργάνωση της έρευνας δράσης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, σχεδιάσαμε πιλοτική παρέμβαση στο πλαίσιο των γνωστικών στόχων που αναφερθήκαν στην αρχή του κεφαλαίου ΙΙΙ. Για τον σκοπό αυτό είναι απαραίτητες κάποιες προαπαιτούμενες γνώσεις, ανάμεσα σε άλλα απολύτως απαραίτητες είναι οι μαθηματικές γνώσεις των δυνάμεων και αναλογιών. Η ΣΤ Δημοτικού, όπου οι μαθητές διδάσκονται στοιχειωδώς τα παραπάνω, είναι η μόνη τάξη που προσφέρεται ενδεχόμενα για εφαρμογή της παρέμβασης. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρέμβασης και των καταγραφών των μαθητών, θα δρομολογούσε και τη συνέχεια ή όχι της έρευνας, για την κατάρτιση μιας πρότασης διδασκαλίας μη γραμμικότητας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

1.1 Σχεδιασμός πιλοτικής παρέμβασης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση

Οι σχετικές έρευνες στη βιβλιογραφία που προαναφέραμε, ανέδειξαν περιορισμένες προτάσεις που αφορούσαν διδασκαλία κάποιων εννοιών μη γραμμικότητας σε κάποιες τάξεις πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το σύνολο όμως των εννοιών και η πληρότητα του επιστημονικού περιεχομένου απουσιάζουν από τις έρευνες αυτές. Αυτό είναι κατανοητό λαμβάνοντας υπόψη το επίπεδο γνώσεων των μαθητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών της ΣΤ Δημοτικού ειδικότερα. Στην περίπτωσή μας, αφού μελετήθηκαν οι προτάσεις στη βιβλιογραφία και με αφετηρία την προεργασία που έγινε στα πλαίσια της μεταπτυχιακής εργασίας μας, *Εισαγωγή στοιχείων κλασματοειδούς* *γεωμετρίας στην ΣΤ δημοτικού* Π.Τ.Δ.Ε., Α.Π.Θ. 2003, σχεδιάστηκε πρόταση πιλοτικής παρέμβασης στην ΣΤ τάξη των 9ου και 11ου δημοτικών σχολείων Θεσσαλονίκης. Η πρόταση σε αναλογία με τις προαναφερόμενες έρευνες περιλάμβανε πρόταση διδακτικής αξιοποίησης κάποιων βασικών κλασματοειδών σχημάτων, καθώς και διερεύνηση των απόψεων των μαθητών για την εφαρμογή των παραπάνω στη μελέτη του φυσικού περιβάλλοντος. Έγινε προσπάθεια η πιλοτική παρέμβαση να εφαρμοστεί σε εποικοδομητικό και ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο (Driver R. et al 1998. Σταυρίδου, Ε. 2000, Duit, R. 2001), με ανάδειξη των απόψεων των μαθητών, καταγραφή των απόψεων αυτών και ενδεχόμενη εννοιολογική αλλαγή τους στο πλαίσιο ομάδων εργασίας. Σε σχέση με τους γνωστικούς στόχους, όπως παρατέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, η πρότασή μας αναφερόταν κύρια στον τρίτο διδακτικό στόχο, δηλαδή στην κατανόηση της σημασίας της μη γραμμικότητας στην περιγραφή της φύσης, και δευτερευόντως στους πρώτους δυο. Η προσέγγιση της δεκαδικής διάστασης των κλασματοειδών σχημάτων είναι αδύνατη στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ελάχιστοι μαθητές της ΣΤ τάξης σε Ελλάδα και εξωτερικό κάνουν με ευχέρεια χρήση των δυνάμεων, ακόμη και σε αυτή την περίπτωση όμως η χρήση δύναμης με άρρητο αριθμό ξεπερνά κατά πολύ το επίπεδο της ΣΤ δημοτικού. Με τον τρόπο αυτό καλύπτεται ένα μέρος μόνον του θεωρητικού πυρήνα της μη γραμμικότητας όπως παρατέθηκε στην αρχή του κεφαλαίου ΙΙΙ. Ωστόσο σε αυτή την ηλικία πέρα από τους γνωστικούς στόχους επιδιώκουμε κυρίως συναισθηματικούς στόχους στην πρώτη επαφή των μαθητών με τη νέα γεωμετρία, όπως αναφέρεται και σε όλες τις σχετικές έρευνες. Η επιλογή των δυο δημοτικών σχολείων για πιλοτική παρέμβαση έγινε τυχαία από το κέντρο της Θεσσαλονίκης. Σε αυτή τη φάση της έρευνας η παρέμβαση σε περισσότερα δημοτικά σχολεία λόγω της φύσης του πιλοτικού σχεδιασμού της παρέμβασης δεν ήταν αναγκαία αλλά ούτε και δυνατή.

Στην πιλοτική μας παρέμβαση στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, εφαρμόσαμε δραστηριότητες οι οποίες αποσκοπούσαν κύρια στην ανάδειξη των χαρακτηριστικών των κλασματοειδών σχημάτων με εικόνες και προσομοιώσεις στον υπολογιστή. Ακόμη επιδιώξαμε τη διαπίστωση της συνεχούς επανάληψης και της αυτοομοιότητας σαν τα βασικά χαρακτηριστικά των σχημάτων αυτών από τους μαθητές (κεφάλαιο ΙΙΙ. 1). Για τον σκοπό αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές να καταγράψουν τα χαρακτηριστικά εικόνων και προσομοιώσεων κλασματοειδών σχημάτων (βλ. παράρτημα Α) και να σχεδιάσουν -αν μπορούν- μια ακόμη επανάληψη τέτοιων σχημάτων, όπως το τρίγωνο Sierpinski και η γραμμή von Koch (βλ. κεφάλαιο VII 1.12). Το εποπτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε προέρχεται από σχετικές προτάσεις και πηγές της βιβλιογραφία (Peitgen, H. O. et al. 1999. Nesbitt, V., N. 1992, Γούναρης, Β. 2003, http://members.aol.com/dspontike/fractal, https://www.youtube.com/watch?v=6VZq7EurckI&list=RDRcIrc9aE7Vs&index=5,www.jgiesen.de/chaosSpiel κ.α.). Η συνολική διάρκεια κάθε πιλοτικής παρέμβασης ήταν δύο διδακτικές ώρες.

1.2 Πολιτισμική παράμετρος

Μια σημαντική παράμετρος στη διδασκαλία που τονίζεται σε προαναφερθείσες έρευνες (Nesbitt, V., N. 1992), είναι ότι για τη διδασκαλία της μη γραμμικότητας σε μικρές μαθητικές ηλικίες είναι πολύ σημαντική η χρήση της καθομιλούμενης γλώσσας των μικρών μαθητών, καθώς και η χρήση των καθημερινών εμπειριών και βιωμάτων τους (Madison, D. S. 2005, Driver R. 1985). Σύμφωνα με τις έρευνες αυτές είναι πλεονέκτημα η χρήση της μητρικής γλώσσας και ενδεχόμενα των καθημερινών βιωμάτων των μικρών μαθητών για εισαγωγή στις άγνωστες έννοιες της μη γραμμικότητας, πριν την συστηματική τυποποίηση στις κλασικές μαθηματικές έννοιες και στον συμβατικό μαθηματικό τρόπο σκέψης, όπως πραγματοποιείται κατά κανόνα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το διαφορετικό γλωσσικό και πολιτισμικό περιβάλλον μπορεί να επηρεάσει έτσι την πρώτη επαφή των παιδιών με τη μη γραμμικότητα, θέτοντας στην έρευνα μας και τη διαπολιτισμική παράμετρο.

Τα παραπάνω αποτέλεσαν έναν βασικό ερευνητικό στόχο της πιλοτικής μας παρέμβασης, δηλαδή να αποδειχθεί ή όχι το ενδεχόμενο διαφορετικών αποτελεσμάτων της πρώτης επαφής μαθητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με τη μη γραμμικότητα σε διαφορετικά γλωσσικά και πολιτισμικά περιβάλλοντα. Για τον σκοπό αυτό προγραμματίστηκε σε συνεργασία με παιδαγωγικά τμήματα πανεπιστημίων του εξωτερικού, η προσαρμογή και εφαρμογή της πιλοτικής παρέμβασης στην αντίστοιχη με την ελληνική ΣΤ τάξη πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, στο αγγλοσαξονικό και στο γερμανικό σύστημα γενικής εκπαίδευσης.

2. Διαδικασίες αξιολόγησης

Εφόσον η παρέμβασή μας ήταν πιλοτική και μάλιστα σε πρωτόγνωρο για τους μαθητές γνωστικό πεδίο, αποσκοπούσαμε κυρίως στη συλλογή και μελέτη των περιγραφών και διαπιστώσεων των μαθητών/τριών που συμμετείχαν και ακολουθούσε η ποσοτική και ποιοτική τους ανάλυση.

Μετά την πιλοτική παρέμβαση και μελέτη των καταγραφών στα φύλλα εργασίας, πραγματοποιήθηκαν ακόμη συνεντεύξεις με μαθητές και μαθήτριες κυρίως αναφορικά με την περιγραφή αντικειμένων στη φύση. Σε πολλές περιπτώσεις ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τα αντικείμενα που πρότειναν.

3. Εφαρμογή προγράμματος

Το πρώτο στάδιο της έρευνας δράσης πραγματοποιήθηκε το 2004 και η πιλοτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στην ΣΤ τάξη των 9ου και 11ου δημοτικών σχολείων Θεσσαλονίκης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται πιο κάτω στην ενότητα 4.1.

3.1 Πιλοτική παρέμβαση σε σχολεία της Γερμανίας

Για τη διερεύνηση σε διαφορετικά πολιτισμικά περιβάλλοντα ζητήσαμε τη συνεργασία με την Pädagogische Hochschule Weingarden Γερμανίας. Μετά τη θετική απάντηση, αφού μεταφράστηκε σε συνεργασία με το γερμανικό πανεπιστήμιο ο σχεδιασμός και οι δραστηριότητες στα φύλλα εργασίας, πραγματοποιήσαμε εφαρμογή της πιλοτικής παρέμβασης στη γερμανική γλώσσα στην αντίστοιχη τάξη δυο γερμανικών σχολείων, με άδεια και υπό την αιγίδα του γερμανικού πανεπιστημίου. Συγκεκριμένα η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στο Alb.Einstein Gymnasium Ravensburg και στο Realschule Weingarten. Τα κριτήρια επιλογής των γερμανικών σχολείων ήταν αντίστοιχα με τα προαναφερθέντα για τα δημοτικά της Θεσσαλονίκης (τυχαία από το κέντρο). Αποδείχθηκε ότι το Alb. Einstein Gymnasium ήταν ένα σχολείο καλύτερων επιδόσεων του Realschule Weingarten. Αυτό οφείλεται στη διαφορετική διάρθρωση του γερμανικού εκπαιδευτικού συστήματος για αυτή την τάξη. Σε κάθε τάξη η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε από το Γερμανό δάσκαλο ή τον καθηγητή των μαθηματικών της τάξης αντίστοιχα, παρουσία του ερευνητή.

Αν και είχε σχεδιαστεί στη συνέχεια η εφαρμογή της πιλοτικής παρέμβασης σε δημοτικά σχολεία στην Αγγλία, αυτή δεν πραγματοποιήθηκε λόγω περιορισμών μέσων και χρόνου, αλλά κυρίως λόγω του αυξημένου οικονομικού κόστους που επιβάρυνε σημαντικά τη συνέχεια της διερεύνησης στην Αγγλία. Με αναφορά σε μόνο δυο πολιτισμικά περιβάλλοντα Ελλάδας και Γερμανίας, η διαπολιτισμική παράμετρος της έρευνάς μας είναι ελλιπής. Σημειώνεται ωστόσο η βιβλιογραφική έρευνα (κεφάλαιο ΙΙΙ 2.3) έδειξε ότι σχετικές προτάσεις διδασκαλίας είχαν ήδη διερευνηθεί για την πρωτοβάθμια βαθμίδα στο Αγγλοαμερικανικό σύστημα εκπαίδευσης (Nesbitt, V., N. 1992, Peitgen, H.O. et al 1992 a). Λάβαμε υπόψη τα αποτελέσματά τους στα συμπεράσματα μας για τη διαπολιτισμική παράμετρο της έρευνάς μας (βλ. 4.4 πιο κάτω).

Εξ άλλου η διερεύνηση της επίδρασης διαφορετικού πολιτισμικού περιβάλλοντος στην πρώτη επαφή των μαθητών με τη μη γραμμικότητα, άπτεται ίσως του ερευνητικού μας στόχου, δεν αποτελεί όμως σε καμιά περίπτωση την κύρια κατεύθυνση της διερεύνησής μας. Κάθε περαιτέρω προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση θα απέκλινε του κύριου στόχου μας. Τα αποτελέσματα των πιλοτικών εφαρμογών σε Ελλάδα και Γερμανία αναφέρονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

4. Ερμηνεία δεδομένων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

4.1. Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Οι πιο συνηθισμένες καταγραφές των μαθητών για τα χαρακτηριστικά των εικόνων ήταν:

Οι εικόνες δεν έχουν τέλος.

Η μουσική περιγράφει τις εικόνες χωρίς τέλος.

Υπάρχει ένα σχήμα που επαναλαμβάνεται συνέχεια.

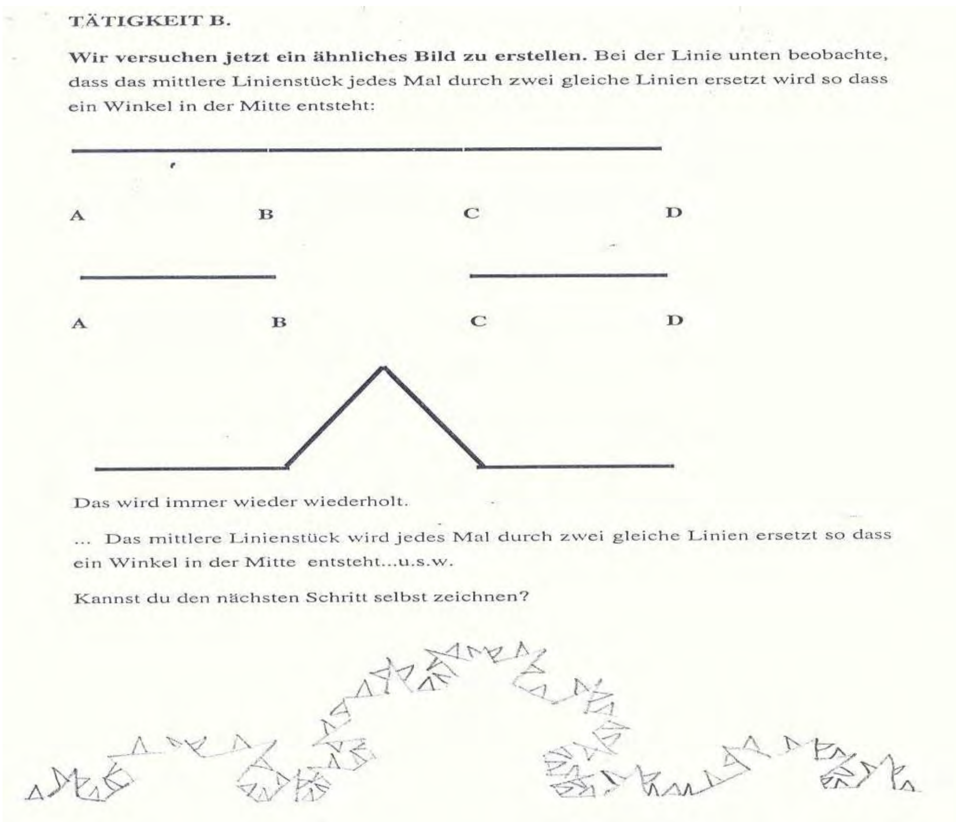
Υπάρχει ένα υπόδειγμα στο οποίο έρχεται η εικόνα ξανά και ξανά.

Όλες οι εικόνες μοιάζουν με τον εαυτό τους, οι εικόνες μικραίνουν συνέχεια στη φαντασία μου όπως στον υπολογιστή κ.λπ.

Στην ερώτηση για μια πιθανή ονομασία των εικόνων προτάθηκαν από τους μαθητές κυρίως οι εξής:

Επαναλαμβανόμενες εικόνες, εικόνες χωρίς τέλος.

Οι επόμενες επαναλήψεις του Sierpinski και της γραμμής von Koch (κεφάλαιο VII 1.12), σχεδιάστηκαν από τους μαθητές σε ποσοστό 80% σωστά.



Εικόνα 1. Επόμενες επαναλήψεις γραμμής von Koch από μαθητές της ΣΤ τάξης γερμανικού σχολείου.

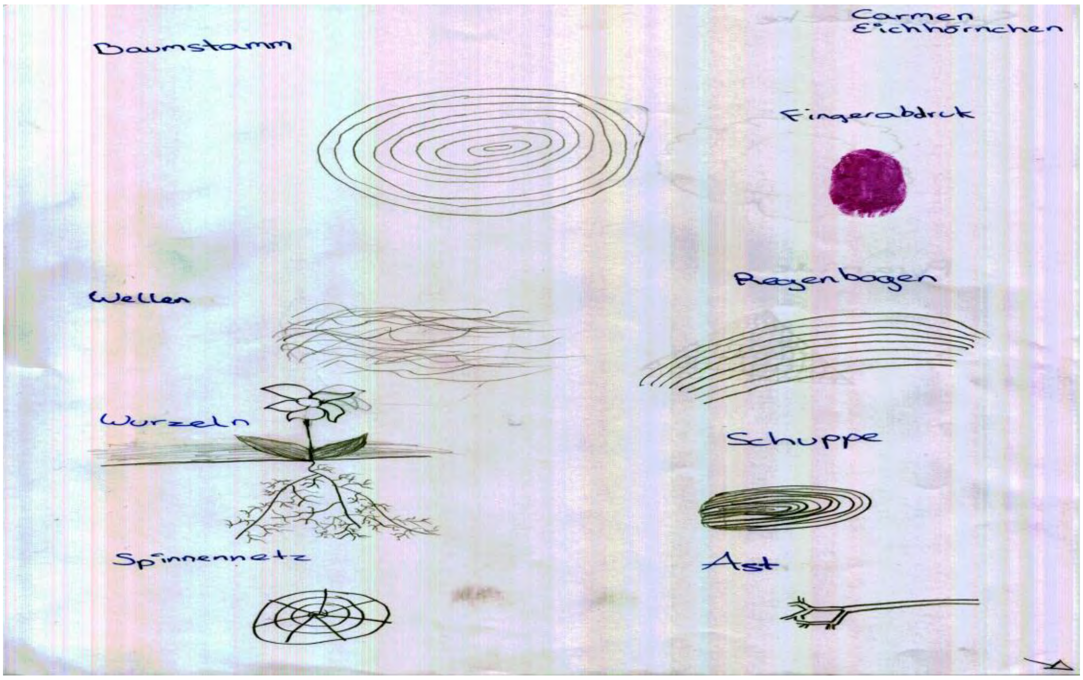
Κατόπιν, αφού παρατηρήθηκαν στον υπολογιστή συνεχείς επαναλήψεις της χιονονιφάδας von Koch (κεφάλαιο ΙΙ 3.3, και κεφάλαιο VII 1.12), σχεδόν όλοι οι μαθητές κατέγραψαν τη διαπίστωση χωρίς τέλος επανάληψης και αύξηση της περιμέτρου με κάθε επανάληψη. Οι καταγραφές σχημάτων στη φύση που θυμίζουν το σχήμα που σχημάτισε ο υπολογιστής (χιονονιφάδα von Koch) είναι κυρίως:

Αστέρι, χιονονιφάδα, λουλούδι, αγκάθι.

Αναφέρθηκαν πολλές περιγραφές αντικειμένων στη φύση που θα μπορούσαν να περιγραφούν σαν κλασματοειδή σχήματα. Οι πιο συνηθισμένες, με την αιτιολόγηση της επανάληψης πολλές φορές ενός αρχικού σχήματος ή μιας λεπτομέρειας. είναι:

Δάσος, βουνά, σύννεφα, κουνουπίδι, τριαντάφυλλο, κουκουνάρι, κάκτοι, ρίζες

Στην εικόνα φαίνονται τα σχέδια γερμανίδας μαθήτριας του Ravensburg:



Εικόνα 2: Σχέδια fractal στη φύση από γερμανίδα μαθήτρια

Οι περιγραφές και αιτιολογήσεις αυτές καλύπτουν το 75% των απαντήσεων. Οι υπόλοιπες καταγραφές αναφέρονται μερικά ή δεν αναφέρονται σε κανένα χαρακτηριστικό των κλασματοειδών. Παράδειγμα:

Διάστημα, ουρανός, θάλασσα γιατί είναι χωρίς τέλος.

DNA γιατί μεταφέρει πάντα τις ίδιες πληροφορίες.

4.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων

Αναλύοντας τα αποτελέσματα καταλήξαμε ότι:

α. Σχετικά με τους συναισθηματικούς στόχους της παρέμβασης, οι μαθητές όχι απλά έδειξαν ενδιαφέρον αλλά ενθουσιάστηκαν και όπως φαίνεται από τις περιγραφές των μαθητών/τριών αναζητούσαν εφαρμογές της νέας γεωμετρίας παντού γύρω τους.

β. Οι γνωστικοί στόχοι της κατανόησης της αυτοομοιότητας και της συνεχούς επανάληψης σαν χαρακτηριστικά των κλασματοειδών σχημάτων, καθώς και η σημασία της μη γραμμικότητας στην περιγραφή της φύσης, δε φαίνεται να αποτέλεσαν πρόβλημα για τους περισσότερους μαθητές. Αυτό τεκμηριώνεται από το υψηλό ποσοστό (περίπου 70%) των καταγραφών στις αντίστοιχες δραστηριότητες, καθώς και από την περιγραφή και αιτιολόγηση των σχημάτων από τη φύση που επέλεξαν.

γ. Μεταγνωστικά, όπως διαφαίνεται από τις καταγραφές και συζητήσεις με τους μαθητές/τριες, η παρέμβαση ανέδειξε μια νέα οπτική στην εικόνα τους για τη φύση:

Τώρα καταλαβαίνω καλύτερα τα δέντρα, τις ρίζες, τη φύση γενικά.

Δοκιμάζουμε νέες γεωμετρίες στη φύση.

Δεν χρειάζονται μονάδες μήκους γιατί είναι το ίδιο υπόδειγμα πάντα.

Είναι πολλές φορές (η φύση) χωρίς τέλος και επαναλαμβάνεται πάντα ένα υπόδειγμα.

Τώρα τη βρίσκω πιο εκπληκτική.

Πολύ από το περιεχόμενο των μαθηματικών υπάρχει στη φύση.

4.3. Σύγκριση αποτελεσμάτων Γερμανίας-Ελλάδας

Σε σχέση με το σχολικό περιβάλλον, οφείλει να διαπιστωθεί ότι το μάθημα των μαθηματικών στην ΣΤ τάξη, πραγματοποιείται στη Γερμανία από μαθηματικό και στην Ελλάδα από τον δάσκαλο της τάξης, με τις ίδιες περίπου ώρες διδασκαλίας και ίδιο περίπου αναλυτικό πρόγραμμα.

Δε διαπιστώθηκε κάποια εμφανής ποσοτική διαφορά στις καταγραφές των μαθητών. Στους μαθητές της Γερμανίας ωστόσο, εμφανίζεται στην καταγραφή των χαρακτηριστικών των κλασματοειδών πολύ συχνά η λέξη **Muster**, που μπορεί να αποδοθεί στα ελληνικά σαν **υπόδειγμα**.

Είναι μια λέξη που συμβαίνει να χρησιμοποιείται από τους μαθητές συχνά στην καθομιλούμενη γλώσσα τους και βοήθησε ίσως τους μαθητές της Γερμανίας να ονομάσουν (*υπόδειγμα σχημάτων*) τις εικόνες και να εκφράσουν τις σκέψεις τους ευχερέστερα και τελικά πλησιέστερα προς την επιστημονική ορολογία της νέας γεωμετρίας (**γεννήτρια σχημάτων**). Επιβεβαιώνεται δηλαδή στο σημείο αυτό η επιρροή του διαφορετικού γλωσσικού και πολιτισμικού παράγοντα στην πρώτη επαφή των παιδιών με τη μη γραμμικότητα, όπως αναφέρθηκε στη βιβλιογραφία (Nesbitt, V., N. 1992, Peitgen, H.O. et al.1992 α). Ενδεικτικά, μια συχνή ονομασία που δόθηκε από μαθητές στην Ελλάδα για τις εικόνες ήταν:

Εικόνες χωρίς τέλος.

Στους μαθητές της Γερμανίας εμφανίστηκε αντίστοιχα και πολύ συχνά η ονομασία:

Εικόνες με υπόδειγμα και χωρίς τέλος.

Η επιρροή του πολιτισμικού και γλωσσικού περιβάλλοντος στην εισαγωγή σε μια νέα ορολογία και ένα νέο τρόπο σκέψης στα μαθηματικά, είναι όπως προαναφέρθηκε αναμενόμενη και επιβεβαιώθηκε και στις πιλοτικές μας παρεμβάσεις, μια βαθύτερη ανάλυση της επιρροής αυτής στο σημείο αυτό όμως ξεφεύγει από τα πλαίσια της έρευνάς μας.

4.4. Συμπεράσματα

Το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη νέα γεωμετρία και οπτική της φύσης ήταν πολύ μεγάλο. Σύμφωνη ήταν στο σημείο αυτό και η γνώμη των εκπαιδευτικών Ελλήνων και Γερμανών που πραγματοποίησαν την παρέμβαση στις τάξεις τους.

Όπως προκύπτει από τις καταγραφές και τα σχέδια των μαθητών οι γνωστικοί στόχοι της αυτοομοιότητας και συνεχούς επανάληψης αλλά και της εφαρμογής της νέας γεωμετρίας στη φύση, μπορούν με περιορισμούς να γίνουν κατανοητοί από τους μαθητές. Σύμφωνη ήταν στο σημείο αυτό και η γνώμη Ελλήνων και Γερμανών εκπαιδευτικών που πραγματοποίησαν την παρέμβαση. Παρόμοιες είναι και οι σχετικές διαπιστώσεις στη βιβλιογραφία για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας στο Αγγλοαμερικανικό εκπαιδευτικό σύστημα, (Nesbitt, V., N. 1992, Peitgen H.O. et al, 1992a Barnsley, M. F.1993).

Η πληρότητα όμως των γνωστικών στόχων όπως τέθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου ΙΙΙ, επειδή γι αυτή είναι απαραίτητες γνώσεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, δεν μπορεί να επιτευχθεί στην ΣΤ τάξη δημοτικού. Η διδακτική αξιοποίηση της μη γραμμικότητας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, παρουσιάζει συναισθηματικό ή μεταγνωστικό ενδιαφέρον ή και περιορισμένο ενδεχόμενα γνωστικό ενδιαφέρον, είναι όμως στα πλαίσια του ερευνητικού μας στόχου αδύνατη.

Κεφ. V

Δεύτερη φάση έρευνας δράσης. Έρευνα δράσης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

1. Οργάνωση της έρευνας, χρήση μέσων

Λαμβάνοντας υπόψη τα συμπεράσματα της διερεύνησης στην ΣΤ τάξη Δημοτικού του προηγούμενου κεφαλαίου, η αμέσως επόμενη υποψήφια τάξη για πληρέστερη διερεύνηση ήταν κάποια τάξη του γυμνασίου. Προκειμένου όμως να επιτευχθούν οι γνωστικοί στόχοι (κεφάλαιο ΙΙΙ 1.), προϋπόθεση είναι η ευχερής χρήση του λόγου ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων, των δυνάμεων, καθώς και των άρρητων αριθμών από τους μαθητές. Ειδικότερα, οι παραπάνω προαπαιτούμενες γνώσεις είναι απαραίτητες σε κάθε προσπάθεια διδακτικής αξιοποίησης της διάστασης αυτοομοιότητας. Στο ελληνικό γυμνάσιο η διδασκαλία των παραπάνω αρχίζει από την Β΄ τάξη γυμνασίου και ολοκληρώνεται στην Γ΄ τάξη γυμνασίου με την ενότητα της σύγκρισης λόγων ομοιότητας. Γι αυτό, αν και υπήρξαν και για την Β΄ γυμνασίου κάποιοι αρχικοί σχεδιασμοί, προτιμήθηκε τελικά η Γ΄ γυμνασίου, όπου οι μαθητές έχουν ολοκληρωμένες τις προαπαιτούμενες γνώσεις που αναφέρθηκαν. Στην τάξη αυτή φαίνεται να είναι δυνατό να επιχειρηθεί η διδακτική αξιοποίηση που διερευνά η εργασία αυτή.

Για τον σκοπό αυτό, αφού προηγήθηκε έρευνα αρχικών απόψεων των μαθητών στην Γ΄ τάξη του 1^{ου} και 10^{ου} γυμνασίου Καλαμαριάς, σχεδιάστηκε πιλοτική παρέμβαση για τις τάξεις αυτές. Η επιλογή των δυο γυμνασίων έγινε τυχαία από την ίδια περιοχή της πόλης. Πριν τον σχεδιασμό της παρέμβασης πραγματοποιήθηκε αρχικά μη συμμετοχική παρατήρηση διδασκαλίας των κρίσιμων ενοτήτων που αφορούν την ισότητα-ομοιότητα σχημάτων στα τμήματα της Γ΄ τάξης Γυμνασίου όπου θα γινόταν πιλοτική παρέμβαση. Σκοπός ήταν η διαπίστωση του βαθμού κατανόησης της ενότητας αυτής (σε συνεργασία με τον καθηγητή της τάξης) και ενδεχόμενων μαθητικών δυσκολιών των μαθητών στις τάξεις αυτές.

Ακολούθησε διερεύνηση αντιλήψεων των μαθητών πάνω στις έννοιες που μας ενδιέφεραν. Η διερεύνηση των αντιλήψεων αυτών περιλάμβανε:

1. Αναλυτική έρευνα στη βιβλιογραφία για εργασίες που έχουν γίνει για τις απόψεις, αντιλήψεις, στάσεις των μαθητών της ηλικίας της Γ΄ γυμνασίου για έννοιες και φαινόμενα της μη γραμμικότητας.

2. Ημιδομημένη συνέντευξη σε μικρές ομάδες με όλους τους μαθητές της Γ΄ τάξης του 10ου γυμνασίου όπου θα γινόταν η πιλοτική παρέμβαση, για επαλήθευση ή όχι των ενδεχόμενων διαπιστώσεων της βιβλιογραφίας. Στη συνέντευξη ήταν πιθανή και η ανάδειξη νέων αντιλήψεων των μαθητών σχετικών με τις έννοιες που μας ενδιέφεραν (Lewis, A. 1992).

3. Στο 1^{ο} γυμνάσιο Καλαμαριάς, πραγματοποιήθηκε προβολή προσομοίωσης κλασματοειδούς σχήματος και μιας ανοιχτής συζήτησης διάρκειας μιας ώρας (τύπου καταιγισμού ιδεών των μαθητών), με τους μαθητές της τάξης που θα γινόταν η παρέμβαση.

Στη συνέχεια σχεδιάσαμε πιλοτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε από τον καθηγητή της τάξης. Ο ερευνητής θα μπορούσε να χαρακτηριστεί στο σημείο αυτό απλά «διευκολυντής» στο πλαίσιο της έρευνας δράσης (Cohen, L. Manion, L. 1997). Κατά τη διάρκεια της πιλοτικής παρέμβασης διανεμήθηκαν φύλλα εργασίας, τα οποία στη συνέχεια αποτελέσαν αντικείμενο ποιοτικής κυρίως ανάλυσης για την βελτίωση του διδακτικού υλικού και της πορείας διδασκαλίας ενδεχόμενων μελλοντικών παρεμβάσεων. Η ποσοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων στο πρώτο στάδιο της έρευνας δράσης δεν επεκτείνεται σε επίπεδο ολοκληρωμένης στατιστικής ανάλυσης (Johnson, B., Christensen, L. 2008).

Τα εργαλεία συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιηθήκαν στη έρευνα είναι τα φύλλα εργασίας κατά την πιλοτική παρέμβαση, η απομαγνητοφώνηση της ανοιχτής συζήτησης (τύπου καταιγισμού ιδεών των μαθητών), τα ερωτηματολόγια και οι μαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις για την ανάδειξη των απόψεων των μαθητών (Cohen, L. Manion, L. 1997, Johnson, B., Christensen, L. 2008).

2. Διαδικασίες αξιολόγησης

Η αξιολόγηση στο πλαίσιο της έρευνας δράσης προβλέπεται να είναι διαχρονικά συνεχής (Cohen, L. Manion, L. 1997, Johnson, B., Christensen, L. 2008). Στη δική μας περίπτωση εφαρμόστηκαν οι εξής διαδικασίες:

1. Αξιολόγηση των απόψεων των μαθητών στις συνεντεύξεις και στην ανοιχτή συζήτηση. Οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν και αναλύθηκαν ποιοτικά.

2. Αξιολόγηση των φύλλων εργασίας της πιλοτικής παρέμβασης. Οι περιγραφές και διαπιστώσεις των μαθητών αναλυθήκαν ποιοτικά με σκοπό:

α. Τον έλεγχο επιτυχίας των γνωστικών στόχων.

β. Τη βελτίωση του σχεδίου διδακτικής παρέμβασης για την ενδεχόμενη συνέχεια της έρευνας.

3. Αξιολόγηση ολόκληρης της πιλοτικής παρέμβασης από τον ερευνητή μετά την ανάλυση της απομαγνητοφώνησης της παρέμβασης.

3. Εφαρμογή προγράμματος

3.1 Αρχική διερεύνηση για τις απόψεις των μαθητών

Σύμφωνα με τον παραπάνω σχεδιασμό, διενεργήθηκε κατά το σχολικό έτος 2004-05 αρχική έρευνα στα γυμνάσια όπου θα γινόταν η πιλοτική παρέμβαση, για τη διαπίστωση των απόψεων των μαθητών σχετικά με τις έννοιες μας ενδιαφέρουν.

Αντίθετα με ότι συμβαίνει για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, οι απόψεις-στάσεις των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τις έννοιες που μας ενδιαφέρουν αναφέρονται σε αρκετές έρευνες στη βιβλιογραφία (Peitgen, H. O. et al, 1992a,b, Komorek, M., et al 2001, Σταύρου Δ. 2004., Fischbein, E. Tirosh, D Hess, P. 1979, Σπηλιοπούλου, Χ., 2004 κ.α.) και αφορούν κυρίως:

1. Την αποδοχή ή όχι της δυνατότητας πρόβλεψης της εξέλιξης καθώς και της ύπαρξης δομής (τάξης) στα δυναμικά συστήματα. (Komorek, M. 1997, Duit R. 1997, Stayrou D. 2002, 2005, 2008, Peitgen H. O., 1992 a,b, Devaney, R. 1990 Nemirovsky, R. 1993, βλ. κεφάλαιο VII 1.1,1.2).

2. Την υποκειμενική άποψη που έχουν οι μαθητές για την έννοια της διάστασης. Τη διαφοροποίηση ειδικότερα ότι άλλες είναι οι διαστάσεις του πραγματικού κόσμου (της καθημερινότητας) και άλλες του επιστημονικού (του ιδεατού) κόσμου (Δρακόπουλος Β., Δάλλα Λ., 1997 βλ. κεφάλαιο VII 1.10).

3. Την έννοια του απείρου, της συνεχούς επανάληψης, της ομοιότητας-αυτοομοιότητας κ.λπ. (Fischbein, E. Tirosh, D Hess, P. 1979, Σπηλιοπούλου, Χ., 2004. Vollrath H. J. 1977 βλ. κεφάλαιο VII 1.3).

Οι παραπάνω έννοιες είναι απαραίτητες για τους γνωστικούς στόχους της πιλοτικής παρέμβασης και γι' αυτό συμπεριλαμβάνονται ευθύς εξαρχής στη φάση της έρευνας δράσης. Στη συνέχεια της έρευνας και αφού διαπιστώθηκαν και στις επόμενες φάσεις της έρευνας μας σε άλλα γυμνάσια, οι εν λόγω απόψεις των μαθητών παρατίθενται με πληρότητα στο κεφάλαιο VII. 1. στο οποίο και η έρευνά μας μεθοδολογικά ολοκληρώνεται. Ειδικά για τη διαπίστωση των απόψεων των μαθητών σε σχέση με ένα εξελισσόμενο δυναμικό σύστημα και την ύπαρξη ή όχι εσωτερικής δομής σε αυτό (τρίγωνο Sierpinski VII. 1.12, και κεφάλαιο X.1,2), δόθηκε ιδιαίτερο βάρος στη συνέντευξη στη διερεύνηση των απόψεων των μαθητών για το τι ακριβώς είναι τρίγωνο (Χατζηκυριάκου, Κ. 2004). Η ειδικότερη αυτή διερεύνηση στάθηκε απαραίτητη πριν τις πιλοτικές παρεμβάσεις, και αποδείχθηκε πολύ σημαντική σε όλα τα επόμενα στάδια της έρευνάς μας.

3. 1. 1. Συνέντευξη στο 10^{ο} γυμνάσιο Καλαμαριάς

Οι αρχικές συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν ανώνυμα με το Γ1 του 10^{ου} γυμνάσιου Καλαμαριάς συνόλου 18 μαθητών/τριών, με τις εξής ομάδες όπως σχηματίστηκαν εθελοντικά και ονομάστηκαν από τους ίδιους τους μαθητές:

1. Ομάδα Άρης : 2 αγόρια, ένα κορίτσι.

2. Ομάδα Opel 400 : 3 αγόρια.

3. Ομάδα Super 4 : 3 κορίτσια.

4. Ομάδα Super 3 : 3 κορίτσια.

5. Ομάδα Φοίνικας : 3 κορίτσια.

6. Ομάδα ατρόμητες : 3 κορίτσια.

Το σχέδιο συνέντευξης δεν ήταν άκαμπτο αλλά ευέλικτο, πιθανές καταγραφές των μαθητών μπορούσαν να οδηγήσουν σε συζήτηση και απομάκρυνση από το αρχικό σχέδιο, επαναφορά και συνέχιση μετά το τέλος της ενδεχόμενης διαφοροποίησης (Cohen, L. Manion, L. 1997. Lewis, A. 1992, Ault, C. R. 1983). Στη συνέντευξη έγινε ακόμη έλεγχος και αξιολόγηση των προαπαιτούμενων γνώσεων των μαθητών, (λόγος ομοιότητας, υπολογισμός εμβαδού τριγώνου κ.λπ.).

Η συνέντευξη μαγνητοσκοπήθηκε, ωστόσο όπου ήταν απαραίτητο η καταγραφή ή το σχέδιο γινόταν από τους ίδιους τους μαθητές στο φύλλο συνέντευξης.

Οι κατηγορίες των απαντήσεων, γνώσεων ή απόψεων των μαθητών που διερευνήθηκαν με την αρχική συνέντευξη ήταν:

1. Έλεγχος των προαπαιτούμενων γνώσεων, ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων, λόγος ομοιότητας.

2. Έλεγχος χειρισμού απλών προβλημάτων με εμβαδά τριγώνων.

3. Η άποψη των μαθητών για το τι ακριβώς είναι τρίγωνο.

4. Η άποψη των μαθητών για το τι είναι διάσταση.

5. Απόψεις για εξελισσόμενα συστήματα, επαναληπτικότητα, χάος και τάξη.

Οι κατηγορίες 1-3 αναφέρονταν περισσότερο στη διερεύνηση προαπαιτούμενων γνώσεων, οι ερωτήσεις 4-5 αναφερόταν περισσότερο στη διερεύνηση απόψεων για νέες έννοιες που ενδιαφέρουν την πιλοτική μας παρέμβαση.

Όλοι οι μαθητές της τάξης που θα γινόταν η παρέμβαση πήραν μέρος σε ομάδες των τριών. Η διάρκειά της συνέντευξης ήταν 20 λεπτά της ώρας για κάθε τριάδα, συνολικά 3 περίπου ώρες διδασκαλίας.

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται κατηγοριοποιημένες οι απαντήσεις των μαθητών, διαβαθμισμένες στην κλίμακα επάρκειας και συνάφειας 0-6, όπου το 0 αντιστοιχεί σε έλλειψη σωστής απάντησης από όλες τις ομάδες έως το έξι που αντιστοιχεί σε σωστή απάντηση και από τις 6 ομάδες. Σε κάθε ομάδα οι απαντήσεις κατοχυρώνονται ως σωστές, εφόσον τουλάχιστον 2 στους 3 μαθητές της ομάδας δώσουν τελικά σωστή απάντηση σε όλες τις ερωτήσεις που συνθέτουν την κατηγορία. Η επάρκεια γνώσεων αναφέρεται στις πρώτες τρεις κατηγορίες, η συνάφεια απόψεων με τους επιδιωκόμενους γνωστικούς μας στόχους στις τελευταίες δυο κατηγορίες.

Επάρκεια /συνάφεια	Καθόλου 0	Ελάχιστη 1	Μικρή 2	Μέτρια 3	Καλή 4	Πολύ καλή 5	Άριστη 6
1.Ομοιότητα γ. Σχημάτων			x				
2.Πρόβλημα εμβαδών, Sierpinski			x				
3. Τρίγωνα					x		
4. Διαστάσεις		x					
5.Εξελισ-σόμενα συστήματα						x	

Πίνακας 1: 10ο γυμνάσιο Καλαμαριάς, διερεύνηση απόψεων μαθητών

3. 1. 2. Συμπεράσματα για τον σχεδιασμό της πιλοτικής παρέμβασης.

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η επάρκεια των προαπαιτούμενων γνώσεων για τους γνωστικούς στόχους της πιλοτικής μας παρέμβασης αποδείχθηκε κατώτερη του αναμενόμενου, ειδικά σε ότι αφορά τον λόγο ομοιότητας και τον ορισμό των διαστάσεων. Αν και κάποιες απόψεις για τις διαστάσεις που αναφέρθηκαν ήταν πολύ ενδιαφέρουσες, πολλές άλλες καταγραφές π.χ. ότι γεωμετρικές διαστάσεις είναι *το εμβαδόν, η περίμετρος, η διάμετρος και η ακτίνα* ήταν απογοητευτικές. Ακόμη και οι γνωστές ευκλείδειες διαστάσεις αποτέλεσαν πρόβλημα για τους μαθητές, όπως αναμενόταν ίσως και από μέρος της σχετικής βιβλιογραφία (Δρακόπουλος Β., Δάλλα Λ., 1997, Σπηλιοπούλου, Χ., 2004, Μπακόπουλος, Γ., 2000). Τα παραπάνω αποτελέσματα ήταν σε σχέση με το στόχο της έρευνας μας απογοητευτικά, και συνέβαλαν στο να μην επιχειρηθεί προσέγγιση του γνωστικού στόχου της διάστασης αυτοομοιότητας κατά την πιλοτική παρέμβαση.

Αντίθετα οι απόψεις και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα εξελισσόμενα συστήματα, την επαναληπτικότητα, το χάος και την τάξη (π.χ. *το χάος επαναλαμβάνεται συνέχεια, αυτές οι δυο λέξεις πάνε μαζί)* ήταν θετικές ενδείξεις για την πιλοτική παρέμβαση.

Σχετικά με το τρίγωνο, ενδιαφέρον είναι ότι οι μαθητές αν και γνωρίζουν όλοι τον ορισμό του τριγώνου, εννοούν πολλές φορές στην πράξη το τρίγωνο με το εσωτερικό του. Θεωρούν δηλαδή τρίγωνο τις πλευρές του τριγώνου αλλά και την επιφάνειά του. Ο δυισμός αυτός των απόψεων των μαθητών για το τρίγωνο εμφανίζεται σε όλη τη χρονική διάρκεια της έρευνάς μας.

3. 1. 2 Ανοιχτή συζήτηση στο 1^{o} γυμνάσιο Καλαμαριάς

Στο τμήμα όπου θα γινόταν η πιλοτική παρέμβαση στο 1^{o} γυμνάσιο Καλαμαριάς, πραγματοποιήθηκε προβολή προσομοίωσης κλασματοειδούς σχήματος και εικόνων και στη συνέχεια ακολούθησε με όλους τους μαθητές του τμήματος ανοιχτή συζήτηση διάρκειας μιας ώρας. Όπως προκύπτει από την απομαγνητοφώνηση σημειώθηκαν από τους μαθητές και καταγράφηκαν στον πίνακα τα παρακάτω χαρακτηριστικά και εντυπώσεις τους για τα νέα σχήματα:

Οι εικόνες επαναλαμβάνονται συνεχώς, κάθε εικόνα είναι ίδια με την προηγούμενη.

Οι εικόνες αποτελούνται από μια λεπτομέρεια η οποία επαναλαμβάνεται συνεχώς.

Η διαδικασία δεν τελειώνει ποτέ. Συνεχίζεται άπειρες φορές.

Είναι σχήματα στα μαθηματικά αυτά; Γεωμετρία;

Κάθε εικόνα είναι ένα χιλιόμετρο ή και ένα μέτρο.

Οι εικόνες είναι μαγευτικές. Και η μουσική.

Σαν ένα κλαδί που απλώνεται συνεχώς βγάζοντας όλο καινούρια κλαδιά. Με μαγεύει.

Νιώθω να χάνομαι στο βάθος των εικόνων και της μουσικής.

Οι καταγραφές αυτές υπογραμμίζουν το αποτέλεσμα παρόμοιας ανοιχτής συζήτησης από μαθητές της Γερμανίας (Komorek, M. 1997), όπου επίσης τονίζονται οι συναισθηματικού τύπου καταγραφές των μαθητών για τη νέα αυτή γεωμετρία.

Τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν από τους μαθητές αναφέρονται στην αυτοομοιότητα και την επαναληπτικότητα των σχημάτων. Αυτό αποτέλεσε θετική ένδειξη για τον σχεδιασμό της πιλοτικής παρέμβασης με δραστηριότητες με συναφής με την αυτοομοιότητα και την επαναληπτικότητα γνωστικούς στόχους.

3.2 Σχεδιασμός και καινοτομίες της πιλοτικής παρέμβασης

Μετά την παραπάνω διερεύνηση των απόψεων των μαθητών στα δυο γυμνάσια σχεδιάστηκε πιλοτική παρέμβαση με κύριους γνωστικούς στόχους:

1. Την έννοια της επαναληπτικότητας (iteration) και της αυτοομοιότητας (self similarity) των μαθηματικών συναρτήσεων και των γεωμετρικών σχημάτων.

2. Την αδυναμία πρόβλεψης στην εξέλιξη ενός εξελισσόμενου (χαοτικού) συστήματος, αλληλένδετη όμως με την ύπαρξη εσωτερικής δομής στο σύστημα αυτό.

Για την κάλυψη των γνωστικών στόχων, σχεδιάσαμε δυο δραστηριότητες εποικοδομητικού τύπου, οι οποίες εκτελούνταν από τους μαθητές σε ομάδες των δυο (ανά θρανίο). Οι δραστηριότητες αυτές παρατίθενται στην τελική τους μορφή στο κεφάλαιο Χ.1 και Χ.2. Παρέμβαση του καθηγητή πέραν του σχεδίου δεν προβλεπόταν, παρά μόνο επεξηγηματική για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων.

Αναλυτικά η δραστηριότητα Α επιδίωκε την κατανόηση της **αυτοομοιότητας** και της **συνεχούς επανάληψης** βασικών χαρακτηριστικών μιας μη γραμμικής προσέγγισης στη γεωμετρία. Για τον σκοπό αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές να καταγράψουν και σχεδιάσουν επαναλήψεις του τριγώνου Sierpinski παρατηρώντας στη συνέχεια την εκτέλεση επαναλήψεων και καταγράφοντας σχετικά. Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας διαπιστωνόταν τα παραπάνω χαρακτηριστικά και σε άλλα γνωστά τρίγωνα των μαθηματικών της τάξης τους (τρίγωνο Pascal, κεφάλαιο VII .1.7 και κεφάλαιο IX.3.2.3).

Η δραστηριότητα Β επιδίωκε μέσα από ένα παιχνίδι την ενασχόληση με την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος, την διαπίστωση αδυναμίας πρόβλεψης της εξέλιξης του και την εμφάνιση πολύπλοκης (χαοτικής) συμπεριφοράς από απλούς αρχικούς κανόνες. Στο τέλος επιδίωκε την διαπίστωση ύπαρξης εσωτερικής τάξης σε ένα απρόβλεπτο επίπεδο, (Duit, R., Komorek, M. 1997, Peitgen, H. O. 1992a,b), καθώς και της σχέσης της εξέλιξης του χαοτικού συστήματος με το τρίγωνο της προηγούμενης δραστηριότητας (κεφάλαιο VII .1.1,και 1.2 και κεφάλαιο Χ.1 και Χ.2).

Τα διδακτικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στην πιλοτική παρέμβαση (παιχνίδι του χάους, τρίγωνο Sierpinski κ.α.) αναφέρονται με παραλλαγές συχνά στη βιβλιογραφία ή στο διαδίκτυο και δεν αποτελούν νεοεμφανιζόμενες προτάσεις στη βιβλιογραφία. Όμως τα εκπαιδευτικά έργα της πιλοτικής μας παρέμβασης, κύρια ο σχεδιασμός των επαναλήψεων στο φύλλο εργασίας των μαθητών χωρίς τη χρήση του υπολογιστή για το σκοπό αυτό, και το παιχνίδι του χάους με το ζάρι αποτέλεσαν καινοτομίες στη σχετική εκπαιδευτική έρευνα. Ειδικά το παιχνίδι του χάους, παιζόταν με ζάρι και διαφάνεια από κάθε ομάδα χωριστά, και οι διαφάνειες όλων των ομάδων προβάλλονται επικαλυμμένες όλες μαζί στο τέλος της παρέμβασης. Το εκπαιδευτικό έργο της δραστηριότητας Β της πιλοτικής μας παρέμβασης, με το όποιο συνεπακόλουθο διδακτικό του αποτέλεσμα, ήταν μια αδοκίμαστη ευρεσιτεχνία.

3.3 Εφαρμογή πιλοτικών παρεμβάσεων.

Οι πιλοτικές παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν το σχολικό έτος 2005-06 στο μάθημα των μαθηματικών της Γ΄ γυμνασίου σε τρία τμήματα γυμνασίων της Θεσσαλονίκης. Οι παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν σε κάθε τμήμα μετά από την διδασκαλία του (προαπαιτούμενου) λόγου ομοιότητας στα μαθηματικά τους (6η ενότητα του βιβλίου ΟΕΔΒ 2006):

Στο Γ3 του 1^{ου} γυμνασίου Καλαμαριάς στις 14.1.06 σε δυο συνεχόμενες ώρες διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών. Στην πιλοτική παρέμβαση συμμετείχαν 18 μαθητές και μαθήτριες σε 9 ομάδες εργασίας.

Στο Γ1 του 10^{ου} γυμνασίου Καλαμαριάς στις 12.4.2006 σε δυο συνεχόμενες ώρες διδασκαλίας. Το σύνολο των μαθητών που συμμετείχαν στη πιλοτική παρέμβαση ήταν 17 μαθητές και μαθήτριες σε 8 ομάδες εργασίας.

Στο Γ2 του 10^{ου} γυμνασίου Καλαμαριάς στις 12.4.2006 σε δυο συνεχόμενες ώρες διδασκαλίας. Το σύνολο των μαθητών που συμμετείχαν στη πιλοτική παρέμβαση ήταν 15 μαθητές και μαθήτριες σε 7 ομάδες εργασίας.

Σε αυτή τη φάση της έρευνας η πιλοτική παρέμβαση σε περισσότερα γυμνάσια δεν ήταν αναγκαία αλλά ούτε και δυνατή.

4. Ερμηνεία δεδομένων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

4.1. Δραστηριότητα Α. Τρίγωνο Sierpinski

α. Πρώτο μέρος. Τρίγωνο Sierpinski.

Η επόμενη επανάληψη του τριγώνου Sierpinski εκτελέστηκε από τους μαθητές και τις μαθήτριες των γυμνασίων σε ποσοστό 95% σωστά (δηλαδή από 44 μαθητές/τριες σε 22 ομάδες εργασίας). Στο ίδιο υψηλό ποσοστό, οι διαπιστώσεις για τη δυνατότητα επανάληψης της διαδικασίας πρόβλεπαν ενδεικτικά:

Άπειρες ή χωρίς περιορισμό ή για πάντα. Ή χωρίς τέλος.

Για το τρίγωνο Sierpinski, οι απαντήσεις επιβεβαίωσαν άποψη των μαθητών για τον ορισμό ενός τριγώνου με το εσωτερικό του μαζί. Ενδεικτικές περιγραφές για το τι συμβαίνει στην οθόνη του υπολογιστή:

Από κάθε τρίγωνο σχηματίζεται ένα άλλο και οι επαναλήψεις μπορούν να συνεχιστούν όσο θέλουμε ή τα τρίγωνα να γίνουν άπειρα.

Στην οθόνη βλέπουμε να επαναλαμβάνεται το ίδιο πράγμα κάθε φορά, κάθε φορά βλέπουμε το ίδιο πράγμα με την προηγούμενη φορά.

Όλες οι καταγραφές των μαθητών τόσο στον σχεδιασμό του Sierpinski όσο και μετά την παρατήρησή του στον υπολογιστή, εντάσσονται στις κατηγορίες:

1. Της **αυτοομοιότητας** που καταγράφεται συνολικά 21 φορές.

2. Της **συνεχούς επανάληψης** που καταγράφεται συνολικά 24 φορές.

Ή έννοια της συνεχούς επανάληψης αναφέρθηκε σχεδόν σε όλες τις καταγραφές. Οι λέξεις αυτοομοιότητα και γεννήτρια, σύμφωνα με τις οδηγίες προς τον καθηγητή, δεν αναφέρθηκαν από τον καθηγητή καθόλου σε οποιοδήποτε σημείο της παρέμβασης. Με δικά τους λόγια ωστόσο, οι καταγραφές των περισσότερων μαθητών κατονόμασαν με αρκετή ακρίβεια τις έννοιες αυτές.

Ειδικά για το τρίγωνο Sierpinski πολλές απόψεις όπως καταγράφηκαν στην δραστηριότητα Α (π.χ… *μέχρι να βαφτεί όλο το τρίγωνο ή μέχρι να εξαφανιστεί όλο ή να γεμίσει*), φαίνεται να δείχνουν στο σημείο αυτό τη θεωρία του (κεφάλαιο ΙΙ. 3,1).

Συνολικά οι παραπάνω καταγραφές των μαθητών σε σχέση με τους γνωστικούς στόχους ήταν:

Στόχος	Καταγραφές	Σε σύνολο	Ποσοστό
Αυτοομοιότητα	21	48	43%
Επαναληπτικότητα	24	48	50%
Κενό ή λάθος	3	48	7%

Πίνακας 2: Καταγραφές δραστηριότητας Α πιλοτικής παρέμβασης

Στη δραστηριότητα Α διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές αφού σχεδίαζαν μια ή δυο επαναλήψεις δεν συνέχιζαν με τον ίδιο ενθουσιασμό. Ακόμη διαπιστώθηκε ότι η διαδικασία απαιτούσε αρκετό χρόνο, ειδικά στην περίπτωση σχεδιασμού τριγώνου σε νέο φύλλο εργασίας.

β. Δεύτερο μέρος. Τρίγωνο Pascal.

Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας Α οι μαθητές προσπάθησαν να εντοπίσουν στο τρίγωνο του Pascal μια παρόμοια δομή με το τρίγωνο Sierpinski, προκειμένου να διαπιστώσουν την αυτοομοιότητα και τη συνεχή επανάληψη και σε άλλα τρίγωνα των μαθηματικών της τάξης τους. Έχοντας μια πρώτη ιδέα από το πρώτο μέρος, οι περισσότεροι μαθητές αναζήτησαν και σχεδίασαν μια παρόμοια δομή τριγώνου Sierpinski μετά από δυο ή τρεις επαναλήψεις, χωρίς ωστόσο οι περισσότεροι να διαπιστώσουν και να αιτιολογήσουν ικανοποιητικά την ύπαρξη των εσωτερικών περιγραμμένων επί των άρτιων αριθμών τριγώνων (κεφάλαιο VII 1.7.). Επαρκής αιτιολογήσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που αναφέρονται σε περιοχές του τριγώνου με αριθμούς του τύπου:

1. Όλα τα τρίγωνα έχουν ζυγούς αριθμούς.

2. Τα τρίγωνα σχηματίζονται από πολλαπλάσια του 2. κ.λπ.

Στο σύνολο των μαθητών είχαμε επαρκή αιτιολόγηση σε ποσοστό μόνο 29%.

4.2. Δραστηριότητα Β. Παιχνίδι του χάους.

Το παιχνίδι του χάους δημιούργησε ζωηρό ενδιαφέρον στους μαθητές και πραγματοποιήθηκε ικανοποιητικά από όλα τα τμήματα. Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού οι καταγραφές των μαθητών για τη δημιουργία ενός ενδεχόμενου σχήματος στο τρίγωνο των διαφανειών διαφοροποιούνταν σημαντικά. Πολλοί μαθητές απάντησαν αρνητικά, ενδεικτικά:

Δεν βγαίνει τίποτα γιατί δεν μπορούμε να προβλέψουμε τα σημεία στο παιχνίδι του χάους.

Οι περισσότεροι μαθητές ωστόσο (63% συνολικά), προβλέψανε ότι θα δημιουργηθεί κάτι συγκεκριμένο, ενδεικτικά:

Ναι, γιατί οι γραμμές που θα χαράξω θα έχουν πάντα κατεύθυνση προς το Α, Β ,C.

Πιστεύω ότι θα σχηματιστεί ένα μεγάλο τρίγωνο ή τετράγωνο με πολλά μικρότερα γύρω του.

Οι περισσότερες από αυτές τις απαντήσεις (19 από τις 25), προβλέπουν τον σχηματισμό κάποιου τριγώνου, η αιτιολόγηση όμως του γιατί πιστεύουν ότι θα συμβεί αυτό μιμητικά παραπέμπει στη δραστηριότητα Α. Κατά την εκτέλεση του παιχνιδιού η καλύτερη προσέγγιση του τριγώνου Sierpinski πραγματοποιήθηκε στο Γ3 του 1ου γυμνασίου Καλαμαριάς, χάρη στην προσεκτική εκτέλεση και παρακολούθηση της δραστηριότητας από τον καθηγητή της τάξης. Η απρόοπτη εμφάνιση του τριγώνου της δραστηριότητας Α προκάλεσε ζωηρή εντύπωση και επιφωνήματα από όλα τα τμήματα. Αυτό φάνηκε και σε συναισθηματικού τύπου καταγραφές όπως:

Όπως βλέπετε σχηματίστηκε το τρίγωνο Sierpinski. Το τρίγωνο με εντυπωσιάζει. Πρώτη φορά το βλέπω και δεν το φανταζόμουν καθόλου.

Σαν πιθανή εξήγηση για αυτό που συνέβη δόθηκαν απαντήσεις από το 80% των μαθητών. Ενδεικτικά:

Σχηματίστηκε το τρίγωνο Sierpinski και αυτό κατά τη γνώμη μου έγινε γιατί κινούμασταν μέσα σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο και τα σχήματα που σχηματίσαμε ήταν ομοιόμορφα.

Σχηματίστηκαν πολλά τρίγωνα γιατί τα σημεία ήταν πολλά και συγκεντρωμένα γύρω από το κέντρο. Στη μέση έμεινε ένα μεγάλο κενό και έτσι σχηματίστηκε το τρίγωνο Sierpinski.

Στην πλειοψηφία τους οι παραπάνω καταγραφές αντιστοιχούν σε μια ή περισσότερες εξηγήσεις με βάση τις γνώσεις των μαθηματικών της τάξης τους αλλά και τις νέες γνώσεις της προηγούμενης δραστηριότητας της παρέμβασης. Για το 80% των ικανοποιητικών αιτιολογήσεων, είναι πολύ σημαντικό ότι περισσότερες καταγραφές των μαθητών δόθηκαν με έννοιες που γνώρισαν στην προηγούμενη δραστηριότητα και αντιστοιχούν στους γνωστικούς στόχους της, δηλαδή:

Της **αυτοομοιότητας**. 1, 3, 8, 10, 12. (Σύνολο 13 καταγραφές)

Της **συνεχούς επανάληψης**: Ενδεικτικά οι παραπάνω καταγραφές: 1, 4, 6, 8, 10, 11. (Σύνολο 20 καταγραφές).

Πολλές καταγραφές φανέρωσαν την αναζήτηση μιας εσωτερικής τάξης ή σταθερότητας ή αιτιοκρατίας, για την εξήγηση της δημιουργίας του τριγώνου. Τα σταθερά δεδομένα κατά την εξέλιξη του συστήματος που αναζήτησαν οι μαθητές, αντιστοιχούν στις σταθερές ενός συστήματος αιτιοκρατικού χάους (κεφάλαιο ΙΙ 2).

Γιατί χρησιμοποιούνται τα μισά των αποστάσεων από τα διάφορα σημεία με τις κορυφές, και είναι αδύνατον με τον τρόπο αυτό να προκύψει σημείο στο εσωτερικό τρίγωνο το οποίο και όπως είδαμε αφαιρείται.

Από άλλες καταγραφές διαφαινόταν από τις εκφράσεις που χρησιμοποίησαν οι μαθητές σημεία ή περιοχές έλξης. Οι καταγραφές αυτές αντιστοιχούν στην θεωρία της ασυμπτωτικής προσέγγισης σε ελκτικά σημεία ή περιοχές (κεφάλαιο ΙΙ 2, 3).

Σχηματίστηκε το τρίγωνο Sierpinski γιατί τα σημεία είναι μαζεμένα και το ένα πατάει στο άλλο και έτσι ενώνονται σχηματίζοντας μικρά τρίγωνα.

Επειδή στο κέντρο του τριγώνου δεν υπάρχει καμιά γωνία (στόχος κατεύθυνσης) και οι υπόλοιπες βούλες πετυχαίνουν τα μικρότερα τρίγωνα, (συγκεντρωμένα στις γωνίες)

Συνολικά όλες οι αιτιολογήσεις των μαθητών κατηγοριοποιημένες παρουσιάζονται στον πίνακα 3:

	Καταγραφές	Σύνολο αιτιολογήσεων	Ποσοστό επίτου συνόλου
Αυτοομοιότητα	13	33	39%
Επαναληπτικότητα	20	33	60%
Σταθερές παράμετροι	14	33	42%
Ελκτικά σημεία	8	33	24%

Πίνακας 3: Καταγραφές και αιτιολογήσεις της δραστηριότητας Β

Συγκριτικά και με μικρή διαφορά, οι περισσότερες ποσοτικά και ποιοτικά σωστές καταγραφές προέρχονται από το Γ3 του 1ου γυμνασίου Καλαμαριάς, πιθανώς λόγω της επιμελέστερης επίβλεψης του καθηγητή της τάξης τους.

4.3. Συμπεράσματα και προτάσεις βελτίωσης της παρέμβασης.

1. Η αρχική έρευνα (3.1) επιβεβαίωσε γενικά τις αναφερόμενες στη βιβλιογραφία απόψεις των μαθητών, κυρίως σε ότι αφορά τη σύγχυση απόψεων για τον ορισμό του τριγώνου. Διαπιστώθηκε ακόμη έλλειψη βασικών γνώσεων και αδυναμία χειρισμού συμβατικών μαθηματικών προβλημάτων σε μέρος των μαθητών.

2. Το ενδιαφέρον των μαθητών, όπως διαπιστώθηκε και από τους καθηγητές της εκάστοτε τάξης, ήταν κατά τη διάρκεια της πιλοτικής παρέμβασης

εντονότατο. Από την απομαγνητοφώνηση και από τις καταγραφές των μαθητών προκύπτει ότι την μεγαλύτερη εντύπωση την έκανε το παιχνίδι του χάους.

3. Παρά τα απογοητευτικά αποτελέσματα στον έλεγχο των προαπαιτούμενων γνώσεων, η ανταπόκριση των μαθητών στις δραστηριότητες της πιλοτικής παρέμβασης ήταν πολύ καλή. Το ενδιαφέρον αυτό για τη μη συμβατική προσέγγιση των μαθηματικών στην πιλοτική μας παρέμβαση, ίσως εξηγεί και την έλλειψη σημαντικής διαφοράς στις σωστές καταγραφές των μαθητών όλων των γυμνασίων. Τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων Α και Β ήταν σαφείς ενδείξεις της επιτυχίας των γνωστικών στόχων της πιλοτικής παρέμβασης και αποτέλεσαν ήδη από το πρώτο στάδιο της έρευνας ένα ισχυρό επιχείρημα διδακτικής αξιοποίησης μη γραμμικής προσέγγισης στα μαθηματικά. Αν και ακολούθησε συνεχής αλληλεπίδραση και βελτίωση του σχεδίου παρέμβασης ως την τελική του μορφή (κεφάλαιο Χ), οι δυο αυτές δραστηριότητες φάνηκε από την έρευνα δράσης να καθορίζουν ήδη τον κεντρικό κορμό μελλοντικών παρεμβάσεων.

4. Υπενθυμίζεται ότι μετά τα αποτελέσματα της αρχικής έρευνας σχετικά με τις προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών για τις δυνάμεις και τους λόγους ομοιότητας (ενότητα 3.1), το ενδεχόμενο γνωστικών στόχων με τη διάσταση αυτοομοιότητας είχε αρχικά αποκλειστεί. Τα αποτελέσματα όμως των υπόλοιπων γνωστικών στόχων ειδικότερα οι καταγραφές για την αυτοομοιότητα σε όλα τα γυμνάσια ήταν όμως ενθαρρυντικά για τον μελλοντικό σχεδιασμό μιας νέας δραστηριότητας που να περιλαμβάνει την άρρητη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski, καλύπτοντας με τον τρόπο αυτό όλους τους γνωστικούς στόχους όπως τέθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου III.

5. Στα αρνητικά αποτελέσματα της πιλοτικής παρέμβασης ήταν ότι διαπιστώθηκε ότι δύο ώρες για την επιμελημένη εκτέλεση των δραστηριοτήτων Α και Β δεν ήταν αρκετή. Ο σχεδιασμός της γεννήτριας Sierpinski σε χωριστό φύλλο απαίτησε επίσης αρκετό χρόνο, το ίδιο και η τρίτη επανάληψή του. Αφού ο αλγόριθμος της επαναληπτικότητας έγινε ήδη κατανοητός στις δυο πρώτες επαναλήψεις, μια τρίτη επανάληψη δεν προσφέρει κάτι παραπάνω, είναι χρονοβόρα διαδικασία και ελαττώνεται το ενδιαφέρον των μαθητών. Οι σχετικές οδηγίες στα φύλλα εργασίας προσαρμόστηκαν ανάλογα.

Η δραστηριότητα Β απαίτησε προσοχή και άνεση χρόνου (τουλάχιστον 30 λεπτά μόνο στην εκτέλεση), ενώ για το τρίγωνο του Pascal χρειάστηκε ένα σημαντικό χρονικό διάστημα μόνο για να εντοπιστεί το περίγραμμα των άρτιων αριθμών και στη συνέχεια να δοθεί η απάντηση των ερωτήσεων. Ακόμη φάνηκε από τις καταγραφές ότι οι περισσότεροι μαθητές δε γνώριζαν το τρίγωνο Pascal και τις ιδιότητές του, αν και συμπεριλαμβανόταν στο σχετικό κεφάλαιο του βιβλίου τους και υποτίθεται το είχαν διδαχθεί, με αποτέλεσμα απώλεια χρόνου και τελικά εντοπισμό των ιδιοτήτων του που θα έπρεπε ήδη να γνωρίζουν και δεν έχουν σχέση με την παρέμβασή μας.

6. Οι πολλές καταγραφές με διαθεματικές προεκτάσεις καθώς και η αναζήτηση σταθερών παραμέτρων στο παιχνίδι του χάους (ενότητα 4.2) άνοιξαν ένα πεδίο διερεύνησης μιας διαθεματικής προσέγγισης της μη γραμμικότητας. Η διαθεματική γέφυρα με τη φυσική, ειδικά σε σχέση με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού του χάους, θα έπρεπε πλέον να μελετηθεί σε επόμενο στάδιο της έρευνας. Αυτό θα αποτελούσε και μια σύνδεση της έρευνάς μας με παρόμοιες έρευνες στη βιβλιογραφία.

5. Σύνοψη της έρευνας δράσης (πρώτη φάση έρευνας 2004 και 2005).

Η έρευνα δράσης υπήρξε καταλυτική στη διερεύνηση μας. Έδειξε ότι ο ερευνητικός μας στόχος ήταν δυνατόν να επιτευχθεί, απέκλεισε πολλές από τις αρχικές κατευθύνσεις πορείας μας (π.χ. τη διδακτική αξιοποίηση στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση), άνοιξε όμως ταυτόχρονα άλλες ελπιδοφόρες κατευθύνσεις (π.χ. το διδακτικό έργο με το παιχνίδι του χάους στην Γ΄ γυμνασίου). Αποτέλεσε το πρώτο φώς στη διερεύνηση μας και έδειξε το δρόμο για τη συνέχεια της.

ΚΕΦ. VI
Δεύτερη φάση έρευνας. Σπουδή περίπτωσης

1. Νέα μεθοδολογική προσέγγιση

Η αλληλεπίδραση της πληρότητας της θεωρίας με τη διδακτική έρευνα όπως προαναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου ΙΙΙ, ήταν η κύρια παράμετρος της έρευνάς μας. Με τη λήξη της έρευνας δράσης και των πιλοτικών παρεμβάσεων του πρώτου σταδίου της έρευνάς μας, η αλληλεπίδραση αυτή ήταν πλέον εμφανής. Τα συμπεράσματα των πιλοτικών παρεμβάσεων, επέβαλαν αλλαγές στον σχεδιασμό μιας ενδεχόμενης νέας παρέμβασης. Αναγκαία ήταν ακόμη μια νέα μεθοδολογική προσέγγιση που θα μας επέτρεπε να εμβαθύνουμε περισσότερο στα πιο σημαντικά για την έρευνά μας δεδομένα.

Μετά την πρώτη φάση της έρευνας δράσης (2004, 2005), μια δεύτερη φάση στην έρευνά μας πραγματοποιήθηκε την επόμενη σχολική χρονιά. Αναλυτικά οι λόγοι που όρισαν τη δεύτερη φάση της έρευνας μας ήταν οι εξής:

1. Τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης της έρευνας ήταν αρνητικά σε κάποιες κατευθύνσεις της παρέμβασης (π.χ. για τη διδακτική πρόταση στην πρωτοβάθμια, ή για τη δραστηριότητα με τρίγωνο Pascal στην Γ΄ Γυμνασίου κ.α.), ωστόσο αποδείχθηκαν απολύτως θετικά προς την κατεύθυνση της επίτευξης των γνωστικών στόχων της αυτοομοιότητας και της επαναληπτικότητας του τριγώνου Sierpinski και της εξέλιξης δυναμικού συστήματος (παιχνίδι του χάους).

2. Διαπιστώσαμε ότι η επέκταση των χαρακτηριστικών του τριγώνου Sierpinski και σε άλλα σχήματα της νέας γεωμετρίας μπορεί να γίνει στόχος μιας νέας πληρέστερης για τον σκοπό αυτό δραστηριότητας (δραστηριότητα Γ, στην τελική της μορφή κεφάλαιο Χ. 3). Το φύλλο καταγραφών και το υλικό που αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε (προσομοιώσεις, εικόνες κ.α.) είχε μερικώς χρησιμοποιηθεί και στην αρχική έρευνα (βλ. παράρτημα Α) και η διδακτική του αξία είχε επιβεβαιωθεί από τις καταγραφές των μαθητών.

3. Η κατανόηση της αυτοομοιότητας και της επαναληπτικότητας, των βασικών δηλαδή γνωστικών στόχων των πιλοτικών παρεμβάσεων διαπιστώθηκε σε μεγάλο βαθμό στην ανάλυση. Αυτό, καθώς και οι ενθαρρυντικές καταγραφές των μαθητών (με δικά τους λόγια) των γενικών χαρακτηριστικών της νέας γεωμετρίας, κατέστησαν αναγκαία πλέον τη διερεύνηση και του τελευταίου γνωστικού στόχο που απέμεινε, και που δεν είχε συμπεριληφθεί στις πιλοτικές παρεμβάσεις, δηλαδή της διαπίστωσης μη ακέραιας διάστασης αυτοομοιότητας. Ο γνωστικός αυτός στόχος αποτέλεσε νέα αδοκίμαστη προσπάθεια στην εκπαιδευτική έρευνα, χωρίς ολοκληρωμένη σχετική πρόταση στη βιβλιογραφία. Η δυνατότητα διδακτικής του αξιοποίησης ή όχι, θα καθοδηγούσε και την περαιτέρω πορεία της έρευνάς μας. Για να διαπιστωθεί αυτό το ενδεχόμενο σχεδιάστηκε μια νέα δραστηριότητα (δραστηριότητα Δ, στην τελική της μορφή κεφάλαιο Χ. 4), η οποία λαμβάνοντας υπόψη την αρχική έρευνα των απόψεων των μαθητών για τη διάσταση, αλλά κυρίως τα αποτελέσματα των πιλοτικών παρεμβάσεων για την αυτοομοιότητα, είχε σαν κεντρική ιδέα την επιδίωξη του γνωστικού στόχου με χρήση της διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski.

4. Με τις νέες δραστηριότητες απαιτήθηκε περισσότερος χρόνος (3 ώρες τουλάχιστον) για τη διδακτική παρέμβαση, η οποία λαμβάνοντας υπόψη το ωρολόγιο πρόγραμμα των γυμνασίων δεν μπορούσε πλέον να ολοκληρωθεί σε μια ημέρα. Ήταν ωστόσο δυνατό η παρέμβαση να πραγματοποιηθεί σε δυο συνεχόμενες ημέρες μαθημάτων.

5. Μια ακόμη βελτίωση στη διαδικασία συλλογής δεδομένων μας, ήταν ότι κατά τη νέα παρέμβαση μαγνητοσκοπήθηκε όχι μόνο η διδασκαλία σε όλη την τάξη, αλλά επιπλέον αυτού μαγνητοσκοπήθηκε μια ομάδα μαθητών χωριστά. Η απομαγνητοφώνηση της ομάδας αυτής έδωσε χρήσιμες πληροφορίες για τον τρόπο που σκέφτονται και συνεργάζονται οι μαθητές στην παρέμβασή μας.

6. Οι πολλές και ενδιαφέρουσες καταγραφές των μαθητών με διαθεματικό περιεχόμενο, αλλά και τα αποτελέσματα της αρχικής έρευνας για τις σχετικές απόψεις τους, κατέστησαν αναγκαία και μια διαθεματική προσέγγιση της διδακτικής μας πρότασης. Ο σχεδιασμός μιας νέας ολοκληρωμένης παρέμβασης στο μάθημα της φυσικής όμως θα απαιτούσε ακόμη ένα εκτενές στάδιο στην έρευνά μας, και η εφαρμογή του στη διδακτική έρευνα στη συνέχεια θα απαιτούσε

6-8 ώρες διδακτικής παρέμβασης. Αυτό θα ξέφευγε από το πλαίσιο της εργασίας μας και δεν ήταν εφικτό στο χρονικό πλαίσιο των παρεμβάσεων μας.

7. Αυτό που φαινόταν εφικτό ήταν, μετά τη δοκιμασμένη πλέον διδακτική παρέμβαση στο μάθημα των μαθηματικών, να ακολουθούσε σχετική συνέντευξη με επιλεγμένες ομάδες μαθητών. Στη συνέντευξη αυτή, με τη χρήση κατάλληλων ερωτηματολογίων και ενός απλού πειράματος, μπορούσε να επιχειρηθεί διαθεματική γέφυρα με τη φυσική. Από τη βιβλιογραφία (Komorek, M. 1997, Komorek, M., Duit, R. 2004, Skordoulis, C., Tolias, V., Stavrou, D. 2005) υπήρχε έτοιμη σχετική πρόταση (teaching experiment) με τη χρήση πειράματος απλού και στη συνέχεια μαγνητικού εκκρεμούς με τρεις πόλους στις κορυφές νοητού ισόπλευρου τριγώνου.

8. Το μαγνητικό εκκρεμές παρατέθηκε στο κεφάλαιο ΙΙ 4.4.2, επαναλαμβάνουμε εδώ ότι αποτελείται από τρεις ίδιους μαγνήτες στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου που έλκουν ετερόπολο μαγνήτη στην άκρη του νήματος αιώρησης http://www.clausewitz.com/Flash/FLVs/ROMP-MP4BS.htm. Η απεικόνιση της κίνησης του παρουσιάζει εσωτερική δομή και αυτοομοιότητα (κεφάλαιο ΙΙ 4.4.2), την οποία οι μαθητές θα μπορούσαν ίσως να συνδέσουν με την αυτοομοιότητα στην εσωτερική δομή του παιχνιδιού του χάους.

9. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, η δράση του ερευνητή στη διδακτική παρέμβαση και στη συνέντευξη που θα ακολουθούσε ήταν πλέον καθαρά συμμετοχική, και εμπεριείχε τόσο ερευνητική όσο και διδακτική υφή.

Για να πραγματοποιηθούν τα παραπάνω σε κάποιο γυμνάσιο απαιτήθηκε σημαντικός διδακτικός χρόνος (3-4 ημέρες) και συνεργασία των μαθητών και των καθηγητών που υπερέβαινε κατά πολύ τον αρχικό σχεδιασμό των παρεμβάσεων μας. Μια τέτοια διευρυμένη διδακτική παρέμβαση δεν ήταν πλέον πιλοτική, και δεν μπορούσε λόγω έκτασης να αποτελέσει στη συνέχεια τη βασική μας πρόταση για συστηματικότερη διερεύνηση σε μεγάλο αριθμό γυμνασίων. Η ειδική μαγνητοσκόπηση συγκεκριμένης ομάδας και η ανάλυση της απομαγνητοφώνησής της σε σχέση με τις καταγραφές της ίδιας ομάδας στην παρέμβαση, μπορούσε όμως να δώσει πολλές πληροφορίες για τον τρόπο σκέψης των μαθητών για τη μη γραμμικότητα. Αυτό ίσχυε ακόμη περισσότερο, εφόσον η ίδια ομάδα συμμετείχε στο πείραμα του μαγνητικού εκκρεμούς σε σχέση με τις εκεί καταγραφές της. Η εμβάθυνση όμως αυτή, λόγω των χρονικών και λειτουργικών περιορισμών στα γυμνάσια των παρεμβάσεων μας που προαναφέρθηκαν, δε θα μπορούσε να επιδιωχθεί σε κάθε διδακτική παρέμβαση στη συνέχεια.

Σε τουλάχιστον μια όμως περίπτωση, δηλαδή σε ένα συγκεκριμένο γυμνάσιο, με σύμφωνη γνώμη και σε συνεργασία με τη διεύθυνση, τους καθηγητές και τους μαθητές, και στα ευρύτερα δυνατά χρονικά και λειτουργικά πλαίσια, θα μπορούσαν σε μια πλήρη διερεύνηση να επιδιωχθούν τα παραπάνω. **Για αυτούς τους λόγους η μεθοδολογική προσέγγιση που επιλέχθηκε για τη δεύτερη φάση της έρευνας μας είναι η μέθοδος της σπουδής περίπτωσης** του συγκεκριμένου γυμνασίου (*intrinsic case study*, Johnson, B., Christensen, L. 2008).

1.1 Διαδικασία συλλογής και ανάλυσης δεδομένων

Η παραπάνω προσέγγιση καθιστούσε την επεξεργασία των δεδομένων της παρέμβασης στα πλαίσια της μελέτης περίπτωσης του συγκεκριμένου γυμνασίου, πολύ πιο αναλυτική από αυτή των πιλοτικών παρεμβάσεων.

Η συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκε όπως προαναφέρθηκε με δυο απομαγνητοφωνήσεις, ανάλυση καταγραφών και διαπιστώσεων στα φύλλα εργασίας, και στη συνέχεια στη συνέντευξη με ταυτόχρονη εκτέλεση του πειράματος, με ερωτηματολόγια και απομαγνητοφώνηση. Επαναλαμβάνουμε, ότι στο μεθοδολογικό πλαίσιο της σπουδής περίπτωσης τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν εκτενώς και περιλάμβαναν:

1. Αναλυτικά τις καταγραφές των ομάδων.

2. Την ποιοτική τους ανάλυση για έλεγχο απόψεων-στάσεων των μαθητών και της επίτευξης των γνωστικών στόχων.

3. Αποσπάσματα από τις απομαγνητοφωνήσεις.

4. Ειδικότερη μελέτη της ομάδας που μαγνητοσκοπήθηκε χωριστά.

5. Μέσα από τη συνέντευξη, με τη βοήθεια του πειράματος καταγραφή των στάσεων και πιθανών εννοιολογικών μεταβολών των μαθητών σχετικά με τη μη γραμμικότητα. Πιθανή σύνδεση με το παιχνίδι του χάους.

1.2 Επιλογή συγκεκριμένου γυμνάσιου: Γυμνάσιο Ν. Μηχανιώνας

Βολιδοσκοπήθηκε η εξασφάλιση της δυνατότητας της ευρύτερης χρονικά διερεύνησης που προαναφέρθηκε, στα γυμνάσια της περιοχής εκπαιδευτικής προϋπηρεσίας του ερευνητή και επιλέχθηκε το γυμνάσιο της Ν. Μηχανιώνας όπου προσφέρθηκε ευχερώς από τη διεύθυνση του γυμνασίου η δυνατότητα αυτή. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στο μάθημα των μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου (24 μαθητές και μαθήτριες συνολικά), και σε δυο συνεχόμενες ημέρες στις 16 και 17.10.2006. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή με βοήθεια του καθηγητή μαθηματικών της τάξης και μαγνητοσκοπήθηκε στο σύνολο της τάξης. Μαγνητοσκοπήθηκε επιπλέον μια ομάδα μαθητών η οποία προσφέρθηκε εθελοντικά για αυτό το σκοπό, για ανάλυση των συζητήσεων των μαθητών εντός της ομάδας εργασίας

Μια εβδομάδα μετά τη διδακτική παρέμβαση ακολούθησε δίωρη συνέντευξη και πείραμα με μαγνητικό εκκρεμές στον χώρο της βιβλιοθήκης του σχολείου. Στη συνέντευξη πήραν μέρος συνολικά 5 μαθητές, συμπεριλαμβανομένης της ομάδας που μαγνητοσκοπήθηκε χωριστά στην παρέμβαση.

2. Σχεδιασμός της νέας διδακτικής παρέμβασης

Η νέα διδακτική παρέμβαση περιλάμβανε με κάποιες βελτιώσεις τις γνωστές δραστηριότητες Α και Β. Στη συνέχεια η δραστηριότητα Γ στην ολοκληρωμένη της μορφή, καθώς και η δραστηριότητα Δ αποτέλεσαν νέα αδοκίμαστη προσπάθεια.

2.1 Γνωστικοί στόχοι

Οι δραστηριότητες Α και Β επιδιώκουν τους ίδιους γνωστικούς στόχους όπως και στις πιλοτικές παρεμβάσεις (κεφάλαιο V, 3.2.).

Στη δραστηριότητα Γ στόχος είναι να διαπιστωθεί, μέσω καταγραφών και ορισμών που θα δώσουν οι μαθητές, η χρήση και κατανόηση βασικών εννοιών της μη γραμμικής γεωμετρίας (αυτοομοιότητα-επαναληπτικότητα). Ακόμη προσφέρεται η δυνατότητα να αναφερθούν και άλλες απόψεις των μαθητών για τη νέα γεωμετρία, καθώς και σύνδεση με σχήματα και φαινόμενα από τη φύση.

Στη δραστηριότητα Δ επιδιώκεται η εισαγωγή στη διάσταση αυτοομοιότητας. Αρχικά έρχονται σε επαφή οι μαθητές με τον ορισμό της διάστασης αυτοομοιότητας με τη χρήση του λόγου ομοιότητας γνωστών σχημάτων από τα μαθηματικά τους, με μια, δυο, ή τρεις διαστάσεις αντίστοιχα, και αυτό καταγράφεται στον πίνακα των διαστάσεων (κεφάλαιο VII 1.10). Στη συνέχεια γίνεται το ίδιο για το γνωστό από προηγούμενες δραστηριότητες τρίγωνο Sierpinski. Από τον πίνακα των διαστάσεων αναμένουμε να διαπιστωθεί τώρα όμως ότι η διάσταση αυτοομοιότητας στο τρίγωνο αυτό είναι δεκαδικός αριθμός (κεφάλαιο X 4.1).

3. Ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρέμβασης

Όπως προαναφέρθηκε τα αποτελέσματα της σπουδής περίπτωσης παρουσιάζονται πιο κάτω ανά ομάδα πλέον πολύ αναλυτικά, συμπεριλαμβάνοντας αποσπάσματα από την απομαγνητοφώνηση καθώς και εμβάθυνση στον τρόπο σκέψης μαθητών μια επιλεγμένης ομάδας.

3.1 Δραστηριότητα Α

Όλες οι ομάδες σχεδίασαν τουλάχιστον μια επανάληψη του τριγώνου Sierpinski. Οχτώ από τις δώδεκα σχεδίασαν τις απαιτούμενες δυο επαναλήψεις. Μια ομάδα δεν σταμάτησε παρά μόνο όταν δεν υπήρχε πια χώρος στα τρίγωνα για άλλες επαναλήψεις, (Λουκία και Βάσω).

Στην ερώτηση ‹‹τι παρατηρείτε›› οι μαθητές απάντησαν:

Διακρίνουμε ότι καθώς σχηματίζουμε τριγωνάκια δημιουργούνται άπειρα μικρότερα. (Παναγιώτης, Πολυχρόνης), (Μιχάλης Σταυρός).

Όσο περισσότερο επαναλαμβάνουμε να σχηματίζουμε τρίγωνα, αυτά γίνονται όλο και πιο μικρά και αυτά αυξάνονται. (Λουκία και Βάσω), (Μάρθα, Ευγενία), (Νότης και Ελένη), (Νικήτας Παύλος).

Αν και αφαιρούμε ένα μέρος του τριγώνου, τα τρίγωνα πολλαπλασιάζονται. (Γιώργος, Στέλιος).

Με πιο ενδιαφέρουσες τις απαντήσεις:

Όλα τα τρίγωνα που κατασκευάσαμε είναι όμοια με το αρχικό. (Κατερίνα, Ντέση).

Παρατηρούμε ότι κάθε τρίγωνο χωρίζεται σε τρία μικρότερα, τα οποία με τη σειρά τους χωρίζονται σε άλλα μικρότερα κ.ο.κ. (Ελένη και Λία)

Οι παραπάνω καταγραφές περιέχουν την αυτοομοιότητα και συνεχή επανάληψη με λόγια των μαθητών.

Υπήρξε μια παρατήρηση αποκλειστικά αισθητικού-συναισθηματικού χαρακτήρα:

Είναι πολύ ωραίο τρίγωνο. Μας αρέσει πολύ. (Μαρία, Δημήτρης).

Στη συνέχεια όλες οι ομάδες δεν είχαν πρόβλημα να διαπιστώσουν ότι *η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές.* (Μάρθα, Ευγενία), (Λουκία και Βάσω), (Νότης και Ελένη), (Κατερίνα, Ντέση), (Ελένη και Λία), (Παναγιώτης, Πολυχρόνης), (Μαρία, Δημήτρης), (Νικήτας Παύλος), (Μιχάλης Σταύρος).

Μπορούμε με την ίδια διαδικασία να σχηματίσουμε ολοένα και περισσότερα, μικρότερα τρίγωνα. (Νίκη, Άννα), (Κυριάκος, Σωκράτης).

Μετά την παρατήρηση συνεχών επαναλήψεων στον υπολογιστή διαπιστώθηκε από όλες τις ομάδες:

Σχηματίζονται (χωρίς σταμάτημα) νέα τρίγωνα. (Λουκία και Βάσω), (Γιώργος, Στέλιος), (Κυριάκος, Σωκράτης) (Νότης και Ελένη), (Κατερίνα, Ντέση).

Τα τρίγωνα γίνονται ξανά και ξανά άπειρες φορές. (Παναγιώτης, Πολυχρόνης)

Ότι οι επαναλήψεις είναι άπειρες. (Κυριάκος, Σωκράτης) ή *συνεχείς ενός σχεδίου* (Νικήτας Παύλος).

Τα τρίγωνα επαναλαμβάνονται επ αόριστον. (Ελένη και Λία).

Ότι τα τρίγωνα δεν σταματούν ποτέ. (Μιχάλης Σταύρος).

Οι καταγραφές των μαθητών πριν και μετά την παρατήρηση στον υπολογιστή πλησιάζουν πολύ τις καταγραφές των πιλοτικών παρεμβάσεων, σε ορισμένες περιπτώσεις είναι ταυτόσημες π.χ.:

Διακρίνουμε ότι καθώς σχηματίζουμε τριγωνάκια δημιουργούνται άπειρα μικρότερα,

Τα παραπάνω δείχνουν την επίτευξη των κύριων γνωστικών στόχων της δραστηριότητας δηλ. της κατανόησης:

1. Της αυτοομοιότητας

2. Της συνεχούς επανάληψης

σαν τα βασικά χαρακτηριστικά της νέας γεωμετρίας. Η καλύτερη προσέγγιση της αυτοομοιότητας ήταν η:

Όλα τα τρίγωνα που κατασκευάσαμε είναι όμοια με το αρχικό (Κατερίνα, Ντέση).

Σε μια καταγραφή (*αν και αφαιρούμε ένα μέρος του τριγώνου, τα τρίγωνα πολλαπλασιάζονται τελικά* Γιώργος, Στέλιος) εμφανίστηκε μια ακόμη ενδιαφέρουσα δευτερεύουσα ιδιότητα των κλασματοειδών σχημάτων.

3.2 Δραστηριότητα Β

Από τις πιλοτικές παρεμβάσεις διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές αναμένουν να σχηματιστεί κάποιο σχήμα χωρίς να μπορούν να το αιτιολογήσουν. Στο πλαίσιο αυτό στο γυμνάσιο Μηχανιώνας οι περισσότερες ομάδες (7) κατέγραψαν ότι θα μπορούσε να σχηματιστεί κάτι χωρίς να το αιτιολογούν. Κάποιες καταγραφές στο σημείο αυτό αναφέρουν ότι αναμένουν *κάποιας μορφής εσωτερικά τρίγωνα*. (Λουκία και Βάσω), (Μαρία, Δημήτρης), ή *γενικά κάποιας μορφής τρίγ*ωνα. (Ελένη και Λία) όπως και στις πιλοτικές παρεμβάσεις.

Κάποιες ομάδες απλά δεν κατέγραψαν τίποτε. (Κυριάκος, Σωκράτης), (Κατερίνα, Ντέση), ή απάντησαν αρνητικά: *Δεν νομίζω* (Μιχάλης Σταύρος) ή η απάντηση ήταν αόριστη: *Οποιαδήποτε σημεία και αν πάρουμε πάντα κάτι θα σχηματιστεί.* (Νότης και Ελένη).

Μετά την εκτέλεση του παιχνιδιού διαπιστώνεται ότι:

Σχηματίστηκε ένα τρίγωνο με πολλά μικρότερα μέσα του. (Βάσω, Λουκία), (Παναγιώτης, Πολυχρόνης).

Σχηματίστηκε το τρίγωνο Sierpinski της προηγούμενης δραστηριότητας. (Γιώργος Στέλιος), (Κυριάκος, Σωκράτης), (Ελένη και Λία), (Νικήτας Παύλος).

Το νέο τρίγωνο γιατί όλα τα σημεία ήταν μέσα στο αρχικό τρίγωνο. (Νίκη, Άννα). (Νότης και Ελένη).

Αλλά και πολύ γενικά: *Ένα τρίγωνο*. (Μιχάλης Σταύρος), (Κατερίνα, Ντέση).

Στην ερώτηση γιατί συνέβη αυτό στις περισσότερες περιπτώσεις δεν δόθηκε κάποια αιτιολόγηση ή πολύ γενικά:

Οι βουλίτσες μπήκαν περίεργα (Μαρία, Δημήτρης), *επειδή τα δεδομένα που μας δόθηκαν ήταν κατάλληλα για το επιθυμητό αποτέλεσμα*. (Κατερίνα, Ντέση), *γιατί όλα τα σημεία ήταν μέσα στο αρχικό τρίγωνο*. (Νίκη, Άννα), (Νότης και Ελένη).

Ενδιαφέρουσα είναι η αιτιολόγηση:

Το τρίγωνο που σχηματίστηκε αποτελείται από μικρά τρίγωνα γιατί κάθε φορά βρίσκουμε σημεία προς κάθε γωνία (Παναγιώτης, Πολυχρόνης)

που παραπέμπει σε αναζήτηση σταθερών στο δυναμικό σύστημα που χρησιμοποιήσαμε (κάτι που διαπιστώθηκε και σε ορισμένες καταγραφές στα γυμνάσια της πιλοτικής παρέμβασης).

Η εμφάνιση της δομής του τριγώνου Sierpinski στην επικάλυψη των διαφανειών ήταν σαφής και προκάλεσε τη συνήθη ισχυρή εντύπωση.

3.3 Δραστηριότητα Γ

Τα χαρακτηριστικά των νέων σχημάτων όπως καταγράφηκαν από τους μαθητές είναι:

1. *Καθώς προχωράμε προς το εσωτερικό των εικόνων, αυτές συνεχώς επαναλαμβάνονται*. (Άννα, Νίκη) ή συνεχώς κινούνται. (Μάρθα, Ευγενία)

2. *Ο ρυθμός της μουσικής επαναλαμβάνεται*. (Άννα, Νίκη).

3. *Επανάληψη σχημάτων, χρωμάτων και μελωδιών*. (Λία-Ελένη και Γιώργος)

4. *Έχουν πολλά χρώματα, πολύ παράξενα σχήματα και μπορούμε να τα μεγεθύνουμε συνέχεια. Έχουν πολύ καλή ανάλυση*. (Παύλος, Νικήτας.)

5. *Η εικόνα που είδαμε έχει πολλά χρώματα και χρησιμοποιεί προοπτική. Στην περίπτωση της μουσικής επαναλαμβάνεται ο ίδιος ήχος και αυξάνεται η ένταση*. (Νότης, Ελένη)

6. *Έχουν προοπτική, επαναλαμβάνεται το ίδιο σχέδιο στη μουσική, ο ίδιος ρυθμός*. (Ντέση, Κατερίνα) (Μιχάλης, Δημήτρης).

7. *Τα χαρακτηριστικά τους είναι ότι ένα σχέδιο επαναλαμβάνεται πολλές φορές στην ίδια εικόνα. Και ότι έτσι όπως μπαίνει το ένα πίσω απ το άλλο δημιουργεί μια ψευδαίσθηση κίνησης*. (Παναγιώτης, Πολυχρόνης)

8. *Είναι χρωματιστές και ακόμη παρατηρούμε μεγέθυνση των εικόνων*. (Κυριάκος, Μαρία).

Εμφανίστηκαν και πολλές αισθητικές-συναισθηματικές παρατηρήσεις όπως:

9. *Τα χαρακτηριστικά από το σχήμα που είδαμε ήταν ότι άλλαξε σε πολύ γρήγορο χρονικό διάστημα το χρώμα του και ήταν πολύ ωραίο. Ήταν φανταστικά. Η μουσική ήταν πολύ απλή και δεν είχε ενδιαφέρον*. (Βάσω, Λουκία)

Η παράσταση που καθοδήγησε περισσότερο τους μαθητές στις καταγραφές τους ήταν:

Η προσομοίωση του υπολογιστή. (*Κλαδί*). Μπορεί να ήταν και από ένα έλατο. (Παύλος, Νικήτας.)

Η εικόνα του υπολογιστή γιατί είχε κίνηση. (Νότης, Ελένη)

Η εικόνα που μοιάζει με ξύλινη σκάλα και η μουσική. (Ντέση, Κατερίνα), (Μάρθα, Ευγενία), (Λία-Ελένη και Γιώργος), (Παναγιώτης, Πολυχρόνης), (Κυριάκος, Μαρία).

Το μπρόκολο (Μιχάλης, Δημήτρης), (Αντώνης, Σταυρός), (Κυριάκος, Μαρία).

Η καφέ σκάλα αλλά και το τρίγωνο της δραστηριότητας Α. (Λία, Ελένη και Γιώργος)

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά κατατάσσονται σε σχέση με τους γνωστικούς στόχους της δραστηριότητας:

Της αυτοομοιότητας: Καταγραφές 4, 5, 6, 7, 8.

Της συνεχούς επανάληψης: Καταγραφές 1, 2,3,4 ,5,6,7, 8

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση των καταγραφών στη δραστηριότητα αυτή μια έννοια (**γεννήτρια**) των κλασματοειδών σχημάτων που περιλαμβάνει εν δυνάμει τις δυο παραπάνω βασικές έννοιες (κεφάλαιο II. 3.3, κεφάλαιο VII 1.8). Με τον όρο γεννήτρια κλασματοειδούς του σχήματος, νοείται το αρχικό σχήμα και ο αλγόριθμος δημιουργίας σχήματος από το προηγούμενο. Η γεννήτρια δεν αποτελεί από μόνη της γνωστικό στόχο στην παρέμβαση, αλλά είναι σημαντική έννοια στην ορολογία των κλασματοειδών και θα μπορούσε να αξιοποιηθεί μελλοντικά κατά την εξέλιξη της έρευνάς μας. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας καταγραφής στην τάξη ήταν:

Τα χαρακτηριστικά τους είναι ότι ένα σχέδιο επαναλαμβάνεται πολλές φορές στην ίδια εικόνα. Και ότι έτσι όπως μπαίνει το ένα πίσω απ το άλλο δημιουργεί μια ψευδαίσθηση κίνησης. (Παναγιώτης, Πολυχρόνης)

Ανάλογες καταγραφές οι 3, 5, 6, 7.

Συνολικά οι καταγραφές της νέας δραστηριότητας Γ κατηγοριοποιημένες ήταν:

Στόχος	Καταγραφές	Ομάδες	Ποσοστό
Αυτοομοιότητα	5	6	50%
Επαναληπτικότητα	8	10	85%
Γεννήτρια	4	5	40%
Κενό ή λάθος	2	2	15%

Πίνακας 1: Οι καταγραφές της νέας δραστηριότητας Γ κατηγοριοποιημένες

Τα παραπάνω ποσοστά που αναφέρονται στο συνολικό 85% των αιτιολογημένων καταγραφών δεν επιδέχονται συνολικής άθροισης, διότι μια καταγραφή μπορεί να αναφέρεται σε περισσότερες κατηγορίες ή ομάδες.

Ενδιαφέρον είναι ότι στις απαντήσεις που αναφέρονται σε κάποιο αρχικό σχέδιο (*γεννήτρια*) δηλαδή στις καταγραφές 5, 6 και 7, γίνεται αναφορά σε προοπτική ή κίνηση. Σχετική είναι και η προτίμηση της πλειοψηφίας των μαθητών σε εικόνες που εμφανίζουν προοπτική.

Ακολουθεί απόσπασμα από την απομαγνητοφώνηση της τάξης που δείχνει την κατανόηση και τον ορισμό από τους μαθητές της αυτοομοιότητας με δικά τους λόγια, αλλά και την δυσκολία απόδοσης της αυτούσιας λέξης:

Ερευνητής: *Αν θα έπρεπε να δώσουμε κάποιο όνομα στις εικόνες, σε όλα αυτά που είδαμε, πώς προτείνετε να ονομάζαμε τις εικόνες αυτές;*

Μαθητής: *Εικονική πραγματικότητα.*

Ερευνητής: *Εικονική πραγματικότητα*. (Αναγραφή στον πίνακα). *Άλλη πρόταση;*

Τάξη:…

Ερευνητής: *Ελάτε παιδιά, από όλα όσα καταγράψατε σε αυτή τη δραστηριότητα, πως θα χαρακτηρίζατε καλύτερα τις εικόνες αυτές*;

Μαθήτρια: *Επαναλαμβανόμενες εικόνες*.

Άλλη μαθήτρια: *Επαναλαμβανόμενες εικόνες και ήχοι*.

Πρώτη μαθήτρια: *Ναι και ήχοι*.

Ερευνητής: *Επαναλαμβανόμενες εικόνες και ήχοι*. (Αναγραφή στον πίνακα). *Άλλο*;

Μαθητής: *Εικόνες με προοπτική*.

Ερευνητής: *Τι εννοείς με προοπτική*;

Μαθητής: *Ότι μεγεθύνονται στο βάθος*.

Ερευνητής: *Εικόνες με προοπτική*. (Αναγραφή στον πίνακα). *Θέλεις να το εξηγήσεις καλύτερα στην τάξη; …….Όχι, καλά. Άλλη πρόταση*;

Τάξη:…

Ερευνητής: *Καλά, από όσα γράφτηκαν στον πίνακα ποιο θα προτείνατε όλοι μαζί για χαρακτηριστικότερη ονομασία των εικόνων*;

(Με μεγάλη πλειοψηφία επικράτησε η ονομασία: *Επαναλαμβανόμενες εικόνες και ήχοι*).

Ερευνητής: *Εκτός από τις εικόνες που είδαμε έχετε να προτείνεται και άλλες εικόνες που να παρουσιάζουν τα χαρακτηριστικά που καταγράψατε*;

Ο μαθητής με την πρόταση προοπτικής: Τα *pixel στην οθόνη του υπολογιστή.*

Ερευνητής: *Γιατί νομίζεις ότι συμβαίνει αυτό;*

Μαθητής: *Γιατί η οθόνη χωρίζεται σε πάρα πολλά μικρά τετράγωνα με* pixel *που είναι όλα ίδια*.

Ερευνητής: *Καλό παράδειγμα, αλλά επαναλαμβάνεται συνεχώς αυτός ο χωρισμός σε τετράγωνα με* pixel*; Είναι αυτό που είπες πριν ότι μεγεθύνονται συνεχώς στο βάθος;*

Μαθητής: *Όχι κάπου σταματάει*.

Ερευνητής: *Άλλο παράδειγμα*;

Μαθήτρια: *Τα έλατα, τα δέντρα*.

Ερευνητής: *Γιατί;*

Μαθήτρια: *Γιατί μοιάζουν να μεγεθύνονται συνεχώς από το κλαδί ως το δέντρο. Και όλα τα δέντρα μοιάζουν*.

Ερευνητής: *Πώς λέγονται στη γεωμετρία δύο ίδια σχήματα που διαφέρουν μόνο ως προς το μέγεθος*;

Νότης*: Όμοια σχήματα.*

Ερευνητής: *Και πώς λέγεται η ιδιότητα αυτή*;

Νότης: *Ομοιότητα*.

Ερευνητής: *Μια παραλλαγή του ορισμού της ομοιότητας, όταν κάθε κομμάτι ενός σχήματος είναι όμοιο με το ίδιο το σχήμα θα μπορούσε να λέγεται…….;*

Τάξη:…….

Νότης: *Ομοιότητα.*

Ερευνητής: *……… όταν κάθε κομμάτι ενός σχήματος είναι όμοιο με το ίδιο το σχήμα λέγεται…….;*

Μαθήτρια*:……….. μήπως ομοιότητα με το ίδιο…..;*

Ερευνητής: *Σε μία λέξη;*

Τάξη:…….

Ερευνητής: *Λέγεται αυτοομοιότητα.*

Αν και όπως φαίνεται από τα αποσπάσματα και τις καταγραφές τους οι μαθητές χρησιμοποίησαν την έννοια της αυτομοιότητας, η λέξη κλειδί δεν δόθηκε αυτούσια από τους μαθητές, παρόλη την υπερβολική ίσως επιμονή του ερευνητή. Η έννοια είναι πρωτόγνωρη για τους μαθητές. Δόθηκε τελικά από τον ερευνητή στο τέλος της δραστηριότητας, γιατί θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη δραστηριότητα.

3.4 Δραστηριότητα Δ.

Οι περισσότεροι μαθητές δεν είχαν πρόβλημα να διαπιστώσουν την ταύτιση του εκθέτη του λόγου ομοιότητας ευθυγράμμων τμημάτων, τετραγώνων και κύβων με τη γεωμετρική διάσταση των σχημάτων αυτών (19 μαθητές στους 24):

Ο αριθμός του εκθέτη είναι ίδιος (ή ίσος) με τις διαστάσεις (Λία, Ελένη και Γιώργος), (Βάσω και Λουκία), (Νότης, Ελένη), (Άννα, Νίκη)

η βάση παραμένει το δυο ενώ οι εκθέτες πάνε με τη σειρά ή οι διαστάσεις αυξάνονται κατά μια. (Παναγιώτης, Πολυχρόνης), (Μαρία, Κυριάκος).

Σε ορισμένες περιπτώσεις τονίστηκε χωρίς αναφορά σε διαστάσεις ότι:

Ο εκθέτης μεγαλώνει κατά ένα. (Μάρθα, Ευγενία), (Μιχάλης, Δημήτρης), (Ντέση Κατερίνα)

Ο αριθμός που καταγράφηκε στη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski από όλες τις παραπάνω ομάδες είναι: 1,5 με αιτιολόγηση:

Είναι ο μόνος από τους εκθέτες που υψώνεται σε δεκαδικό αριθμό. (Μάρθα, Ευγενία).

Αφού η ευθεία έχει εκθέτη 1 και το τετράγωνο 2 τότε το νέο τρίγωνο θα είναι ανάμεσα στο 1 και στο 2. (Βάσω, Λουκία), (Λία, Ελένη και Γιώργος), (Μαρία, Κυριάκος) (Ντέση, Κατερίνα), (Νότης, Ελένη), (Άννα, Νίκη).

Απόσπασμα από την απομαγνητοφώνηση της ομάδας Ευγενίας και Μάρθας που δείχνει το σκεπτικό των μαθητών σχετικά με τον δεκαδικό εκθέτη:

Μάρθα: *Ωχ τι να γράψουμε τώρα;*

Ευγενία: *Μήπως το γράφει το βιβλίο;*

Μάρθα: *Όχι καλέ δεν γράφει τίποτε το βιβλίο. Κύριε; Κύριε;*

Ευγενία: *Δεν ακούει. Εγώ λέω να γράψουμε 1,5.*

Μάρθα: *Γιατί;*

Ευγενία: *Γιατί δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του 2.*

Μάρθα: *Ναι αλλά γιατί 1,5;*

Ευγενία: *Είναι ο μόνος αριθμός που είναι μονός και έχει εκθέτη με δεκαδικό αριθμό;*

Μάρθα: *Ναι είναι ο μόνος αριθμός που δεν είναι ζυγός αλλά είναι μονός άρα….*

Μάρθα: *Κύριε, κύριε;*

Ερευνητής: *Ορίστε.*

Μάρθα: *Κύριε γράψαμε 1,5 γιατί είναι ο μόνος αριθμός που είναι μονός και έχει εκθέτη με δεκαδικό αριθμό. Είναι σωστό;*

Ερευνητής: *Ποιος αριθμός είναι μονός;*

Μάρθα, Ευγενία: *Το 3. Το αποτέλεσμα της δύναμης για τα ίδια κομμάτια..*

Ερευνητής: *Δεν θέλω να σας δώσω την απάντηση τώρα, δεν μας ενδιαφέρει τόσο το σωστό ή λάθος, όλες οι απαντήσεις σας είναι χρήσιμες.*

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απόψεις των μαθητών για το τι θα μπορούσε να σημαίνει αυτό:

Οι μονοί αριθμοί είναι δυνάμεις με εκθέτη με δεκαδικό αριθμό. (Μάρθα, Ευγενία)

Ότι στο τετράγωνο μπορούμε να σχηματίσουμε πολλά τρίγωνα από τα μισά του, και ακόμη πιο μικρά. (Βάσω, Λουκία).

Ότι το αποτέλεσμα που θα προκύψει είναι περίεργο και ενδιάμεσο στις γεωμετρικές διαστάσεις. (Παναγιώτης, Πολυχρόνης).

Αφού η ευθεία έχει εκθέτη 1 και το τετράγωνο 2 τότε το νέο τρίγωνο θα είναι ενδιάμεσο στις γεωμετρικές διαστάσεις (Ντέση, Κατερίνα).

Οι σκέψεις των μαθητών για *περίεργες ενδιάμεσες στις γεωμετρικές διαστάσεις,* αποτελούν ενδείξεις σχετικών νέων εννοιολογήσεων των μαθητών για τη μη γραμμικότητα.

Συνοπτικά τα αποτελέσματα επίτευξης του γνωστικού στόχου παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Γνωστικός στόχος	Ποσοστό σωστών καταγραφών	Κύρια αιτιολόγηση (από 7 ομάδες)
Δεκαδικός εκθέτης στη διάσταση αυτοομοιό-τητας	75%	*Αφού η ευθεία έχει εκθέτη 1 και το τετράγωνο 2 τότε το νέο τρίγωνο θα είναι ανάμεσα στο 1 και στο 2.*

Πίνακας 2. Αποτελέσματα γνωστικού στόχου της νέας δραστηριότητας Δ

4. Διαθεματική παράμετρος

4.1 Teaching experiment

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, η διερεύνηση μιας νέας παρέμβασης στο μάθημα της φυσικής δεν είναι εφικτή (θα αποτελούσε στην ουσία θέμα νέας διδακτορικής διατριβής), αλλά ούτε και αναγκαία (θα ξέφευγε του στόχου αυτής της εργασίας). Η διαθεματική παράμετρος διερευνήθηκε μετά την παρέμβαση στο μάθημα των μαθηματικών και στα πλαίσια συνέντευξης με μικρές ομάδες μαθητών. Η συνέντευξη έγινε με τη μέθοδο teaching experiment προχωρεί με διαδοχικούς κύκλους ερωτήσεων και συνδυάζει καταγραφή απόψεων και εποικοδομητικού τύπου επεξεργασία τους κατά τη διάρκεια της συνέντευξης (Steffe, L. P., D Ambrosio, B. 1996, Steffe, L. P. Thompson, P.W. 2000, Komorek, M., Duit, R. 2004, Paula V. 2003, Χρονάκη, Α. 2010).

Είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθεί η συνέντευξη με την παρουσία ενός ερευνητή/διδάσκοντα (που θα εκτελέσει τη συνέντευξη) και ενός παρατηρητή. Στην περίπτωση μας ο καθηγητής της τάξης προσφέρθηκε να συμμετάσχει ως παρατηρητής.

Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα παρόμοιων συνεντεύξεων-διδασκαλίας στην εκπαιδευτική έρευνα στις θετικές επιστήμες (Toluk, Z., Middleton, J. A. 2003, Katu, N., Lunetta, V.N., van den Berg, E. 1993)

4.2 Σχεδιασμός συνέντευξης και πειράματος με μαγνητικό εκκρεμές

Πρότυπο για το σχεδιασμό μας ήταν η εργασία The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. (Komorek, M., Duit, R. 2004). Το πείραμα του μαγνητικού εκκρεμούς σχεδιάστηκε με τη μορφή συνέντευξης με διδακτικό περιεχόμενο στην οποία έλαβαν μέρος 5 μαθητές. Η διάρκεια της συνέντευξης ήταν 2 ώρες. Η συνέντευξη έλαβε χώρα σε κατάλληλα διαμορφωμένο χώρο της βιβλιοθήκης του σχολείου μια εβδομάδα μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης (βλ. παράρτημα Β). Η συνέντευξη μαγνητοσκοπήθηκε και αναλύθηκε κατόπιν στα πλαίσια της σπουδής περίπτωσης, προσεγγίζοντας κατά το δυνατόν την οπτική του εκάστοτε μαθητή. Τα φύλλα ερωτήσεων δόθηκαν ένα προς ένα σε κάθε μαθητή ταυτόχρονα. Κατά τη συνέντευξη κάθε μαθητής κατέγραφε την προσωπική του άποψη. Κατόπιν με την εκτέλεση πειράματος, όπου προβλεπόταν ομαδική συνεργασία και λάμβανε χώρα συζήτηση, επιδιώξαμε εποικοδομητική διδακτική προσέγγιση των γνωστικών στόχων (βλ. ενότητα 4.4.2). Σε συγκεκριμένα σημεία αναμέναμε γνωστική σύγκρουση και πιθανό ανασχηματισμό των αρχικών απόψεων των μαθητών.

Κατόπιν επαναλαμβανόταν η παραπάνω διαδικασία σε νέο κύκλο συνέντευξης-πειράματος. Τρείς ήταν οι κύκλοι συνολικά, με εφαρμογή πειράματος α. απλού στη συνέχεια β. μαγνητικού εκκρεμούς αντίστοιχα και τέλος γ. μαγνητικού εκκρεμούς με διαφορετικά χρώματα σχεδιασμού.

4.2.1 Ερευνητικοί στόχοι της συνέντευξης- πειράματος

1. Η διερεύνηση και καταγραφή αντιλήψεων και στάσεων των μαθητών για τη δυνατότητα πρόβλεψης εξέλιξης ταλαντώσεων, και την άποψη των μαθητών για την εξάρτηση του αποτελέσματος από την αρχική θέση.

2. Η διερεύνηση ενδεχόμενης μεταβολής των απόψεων αυτών κατά τη διάρκεια του πειράματος.

4. 2. 2 Γνωστικοί στόχοι του πειράματος

Στ πλαίσιο του ερευνητικού στόχου μας και των βασικών γνωστικών στόχων όπως διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο ΙΙΙ.1.1 επιδιώκεται με το πείραμα κυρίως **η διαπίστωση της αδυναμία πρόβλεψης και την ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες στην εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος (χαοτική συμπεριφορά), αλληλένδετη όμως με την ύπαρξη εσωτερικής δομής στα σύστημα αυτά.**

Αναλυτικά σε τρεις κύκλους εκτέλεσης του πειράματος (α. απλό εκκρεμές, β. μαγνητικό εκκρεμές γ. μαγνητικό εκκρεμές με χρώματα), επιδιώκεται να διαπιστωθούν από τους μαθητές και να καταγραφούν (με δικά τους λόγια) οι παρακάτω γνωστικοί στόχοι:

Α. Γνωστικοί στόχοι του απλού εκκρεμούς:

1. Η διαπίστωση από τους μαθητές της δυνατότητας πρόβλεψης της εξέλιξης της ταλάντωσης.

2. Η διαπίστωση από τους μαθητές με δικά τους λόγια της σχέσης αιτίας- αποτελέσματος (**αρχή της ισχυρής αιτιοκρατία**ς κεφάλαιο ΙΙ .5).

Β. Γνωστικοί στόχοι μαγνητικού εκκρεμούς:

1. Η παρατήρηση σύνθετων ταλαντώσεων.

2. Η διαπίστωση από τους μαθητές ότι είναι αδύνατη η πρόβλεψη της εξέλιξης της ταλάντωσης.

3. Η διαπίστωση από τους μαθητές με δικά τους λόγια της **ευαίσθητης εξάρτησης** της εξέλιξης από αρχικές συνθήκες (δηλαδή από την αρχική θέση εκκίνησης κεφάλαιο II 2,3,4).

Γ. Γνωστικοί στόχοι μαγνητικού εκκρεμούς με τρία διαφορετικά χρώματα σχεδιασμού:

1. Η διαπίστωση από τους μαθητές **εσωτερικής τάξης στο χαοτικό μας σύστημα** (κεφάλαιο II 2,3,4), πιο απλά ότι τα χρώματα του εκκρεμούς φαίνεται να προσανατολίζονται σε συγκεκριμένες περιοχές.

2. Επιδιώκεται ακόμη γνωστική σύνδεση με το παιχνίδι του χάους από τη διδακτική παρέμβαση.

Στο τέλος του πειράματος ακολουθούν μερικές ερωτήσεις μεταγνωστικού χαρακτήρα.

4. 3 Εκτέλεση του πειράματος

Εικόνα 1: Εκτέλεση του πειράματος μαγνητικού εκκρεμούς

Η εκτέλεση του πειράματος και οι καταγραφές των μαθητών παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα Β. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία συνέντευξης-πειράματος.

1. ΠΡΩΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

α. Συνέντευξη:

Κατά τη συνέντευξη εμφανίστηκε η άποψη για δυνατότητα πρόβλεψης στη φύση, που εμφανίζεται και σε προηγούμενες έρευνες (κεφάλαιο VII 1.1).

β. Πείραμα: Απλό εκκρεμές

Μετά από αρκετές επαναλήψεις διαπιστώθηκε και καταγράφηκε από όλους τους μαθητές ότι μικρές διαφορές στην αρχική θέση δεν επηρεάζουν σημαντικά την τροχιά αιώρησης.

2. ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

α. Συνέντευξη:

Οι μαθητές κατέγραψαν τις απόψεις τους αφού ρωτήθηκαν σχετικά, ειδικότερα η σημασία της έννοιας ευαίσθητη εξάρτηση από την αρχική θέση ταλάντωσης αποδόθηκε από όλους ως εξής

Ότι η τελική θέση εξαρτάται άμεσα και σε μεγάλο βαθμό από την αρχική.

β. Πείραμα: Μαγνητικό εκκρεμές

Πριν την εκτέλεση όλοι οι μαθητές συμφώνησαν ότι το βαράκι θα εκτελέσει συγκεκριμένη κίνηση όπως και πριν.

Μετά την εκτέλεση της ταλάντωσης όμως όλοι οι μαθητές διαπίστωσαν ότι η κίνηση του εκκρεμούς δεν ανταποκρινόταν στις προβλέψεις τους. Κατά την αιώρηση υπήρξαν επιφωνήματα και παροτρύνσεις προς το βαράκι να πάει τελικά εκεί που είχαν προβλέψει. Για μια στιγμή φάνηκε ότι τουλάχιστον θα κατέληγε στον σωστό πόλο, τελικά απομακρύνθηκε πάλι και κατέληξε αλλού. Η αιώρηση επαναλήφθηκε πολλές φορές γιατί κάθε μαθητής ήθελε να δοκιμάσει μια θέση από την οποία θα μπορούσε να προβλέψει τον πόλο κατάληξης. Τελικά παραιτήθηκαν γιατί δεν βρέθηκε τέτοια αρχική θέση. Μια κίνηση του μαγνητικού εκκρεμούς σε παρόμοιο όπως στο δικό μας πείραμα μαγνητικό εκκρεμές υπάρχει στο http://www.clausewitz.com/Flash/FLVs/ROMP-MP4BS.htm

Οι καταγραφές των μαθητών στο σημείο αυτό είναι αντίθετες από τις καταγραφές των ίδιων μαθητών για το απλό εκκρεμές. Όλοι οι μαθητές κατέγραψαν ότι η κίνηση δεν ήταν αυτή που είχαν προβλέψει.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι επήλθε **γνωστική σύγκρουση** και ανασχηματισμός αρχικής άποψης όλων των μαθητών για την πρόβλεψη της αιώρησης, αλλά οι **διαφορές στην αρχική θέση** αναφέρονται κατά λέξη στις απαντήσεις δυο μόνο μαθητριών:

Οι μικρές αλλαγές στις αρχικές θέσεις μπορεί να αλλάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα της αιώρησης.

Ότι όταν δεν υπήρχαν μαγνήτες μικρές διαφορές στην αρχική θέση δεν προκαλούσαν μεγάλες αλλαγές, ενώ τώρα που έχουμε μαγνήτες υπάρχουν σημαντικές μεταβολές.

Γενικεύοντας οι μαθητές έκριναν ότι τα περισσότερα συστήματα στη φύση είναι μη προβλέψιμα.

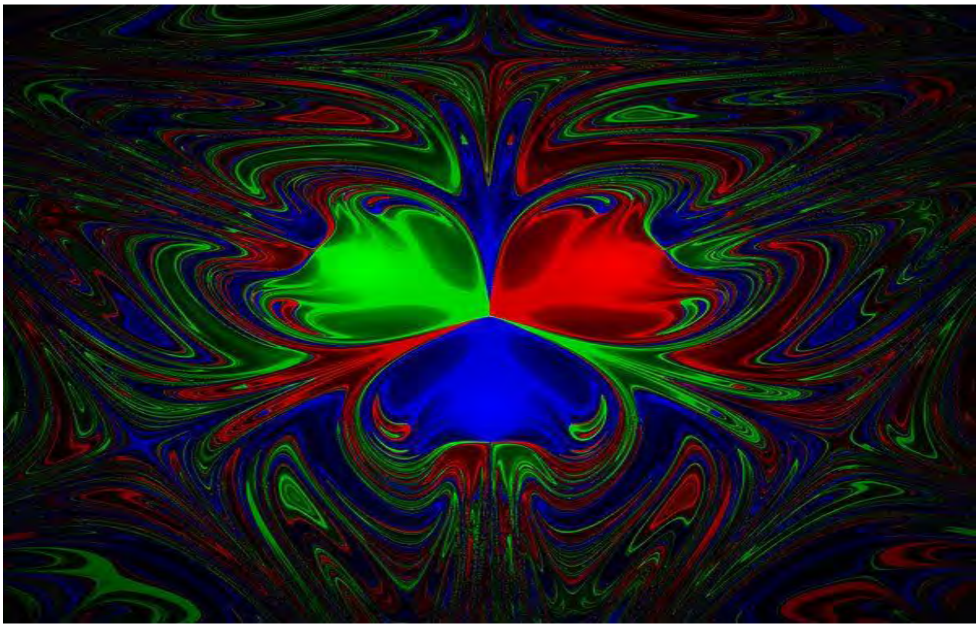
3. ΤΡΙΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ ΜΕ ΧΡΩΜΑΤΑ

α. Συνέντευξη:

Οι μαθητές δίστασαν να απαντήσουν για κάποιας μορφής προβλεψιμότητα στα χρώματα του εκκρεμούς ή πιο γενικά για κάποια τάξη στο εσωτερικό του.

β. Πείραμα: Μαγνητικό εκκρεμές με χρώματα

Ακολούθησε νέα εκτέλεση του πειράματος μαγνητικού εκκρεμούς, αυτή τη φορά σημειώνοντας σε διαφάνειες με διαφορετικά χρώματα κάθε αρχική θέση. Τα χρώματα ήταν τρία σε σχέση με έκαστο πόλο κατάληξης. Οι διαφάνειες στο τέλος θα επικαλύπτονταν κατά την προβολή με τον ίδιο τρόπο όπως στο παιχνίδι του χάους της παρέμβασης. Το ιδανικό αποτέλεσμα θα ήταν να εμφανιστούν περιοχές με συγκέντρωση του αντίστοιχου χρώματος κοντά στον αντίστοιχο πόλο, περιοχές με εναλλασσόμενες συγκεντρώσεις ενός χρώματος σε κάποια απόσταση από αυτόν, και περιοχές χωρίς συγκεκριμένο χρώμα κυρίως στο κέντρο ή εξωτερικά μακριά από τους μαγνήτες. Η εικόνα αυτή στην ιδανική περίπτωση θα προσέγγιζε χρωματιστή εικόνα περιοχών ευστάθειας και αστάθειας του μαγνητικού εκκρεμούς τύπου Y, όπως προκύπτει σε προσομοίωση του πειράματος με χρήση Η.Υ. (κεφ. ΙΙ ενότητα 4.4.2), θα παρουσίαζε δηλαδή εσωτερική δομή και αυτοομοιότητα.



Εικόνα 2: Αναμενόμενο αποτέλεσμα του πειράματος μαγνητικού εκκρεμούς με διαφορετικά χρώματα σε σχέση με τον πόλο κατάληξης

Το αποτέλεσμα δεν ήταν ωστόσο ιδανικό, γιατί η ακρίβεια σημειώσεων, η απλότητα της πειραματικής διάταξης και οι συνθήκες εκτέλεσης του πειράματος στον χώρο της βιβλιοθήκης πολύ απείχαν από το να είναι ιδανικές. Υπήρξε διαφωνία στις διαπιστώσεις των μαθητών.

Στη συζήτηση που ακολούθησε συμφώνησαν όλοι, ότι τελικά τα χρώματα παρουσιάζουν σημεία συγκέντρωσης κύρια κοντά στις αντίστοιχες κορυφές, πράγμα που φαίνεται καλύτερα στο κίτρινο χρώμα. Ή σύνδεση με το παιχνίδι του χάους της διδακτικής παρέμβασης πραγματοποιήθηκε από δυο μόνο μαθήτριες:

Θα σχηματιστεί κάτι σαν το τρίγωνο Sierpinski γιατί έχουμε συγκεκριμένα σημεία, δηλαδή πόλους, που είναι συγκεκριμένα 3. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε το χρώμα αλλά ξέρουμε σίγουρα ότι και οι τρεις πόλοι τραβάνε το εκκρεμές.

Οι μαγνήτες μας καθοδηγούν, «τραβάνε» προς τις κορυφές όπως είπε η Λία, με τον τρόπο που τις σημαδεύαμε με τον χάρακα στο μάθημα.

4. 4. Μεταγνωστικές διαπιστώσεις

Σχεδόν σε όλες τις απαντήσεις των μαθητών εμφανίζεται η αδυναμία πρόβλεψης η οποία επεκτείνεται στην αδυναμία πρόβλεψης στην επιστήμη και στη φύση. Οι καταγραφές αυτές είναι αντίθετες με τις αρχικές απόψεις των μαθητών για προβλεψιμότητα στη φύση όπως καταγράφηκαν στη συνέντευξη. Οι απαντήσεις των μαθητών αναφέρονται γενικότερα στις επιστημολογικές προεκτάσεις της μη γραμμικότητας, μια παράμετρος για τη διδακτική αξιοποίηση εννοιών της μη γραμμικότητας που προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο ΙΙ 1.1. Οι επιστημολογικές προεκτάσεις της μη γραμμικότητας αποτελούν ενδεχομένως μια νέα προσέγγιση και ευρύ πεδίο διερεύνησης, που ξεπερνά όμως το πλαίσιο του στόχου της έρευνας μας.

4. 5. Αποτελέσματα μαγνητικού εκκρεμούς

Η διαθεματική γέφυρα με τη φυσική που επιδιώχθηκε με τη συνέντευξη πείραμα είχε τα εξής αποτελέσματα:

α. Ερευνητικά αποτελέσματα:

Εμφανίστηκε η άποψη για προβλεψιμότητα στη φύση που αναφέρεται και στη βιβλιογραφία (Komorek 1997. Σταύρου Δ., Komorek M., Duit R. 2002 και 2005, Nemirovsky, R. 1993). Στην αναλυτική διερεύνηση των Σταύρου Δ., Komorek M., Duit R. που αφορά μαθητές αντίστοιχης της Β Λυκείου τάξης, αναφέρονται και οι απόψεις των μαθητών για τη μη προβλεψιμότητα και μη κανονικότητα, την τυχαία εξέλιξη ενός συστήματος, καθώς και τη σημασία της επανάληψης για το σκοπό αυτό.

Στην περίπτωσή μας η σημασία της επαναληπτικότητας για την εξέλιξη ενός συστήματος εμφανίστηκε και στις απόψεις των μαθητών στην αιτιολόγηση του παιχνιδιού του χάους.

β. Διδακτικά αποτελέσματα:

1. Απλό εκκρεμές: Οι καταγραφές στο απλό εκκρεμές πριν και μετά την εκτέλεση του πειράματος, επιβεβαίωσαν απλά τις απόψεις των μαθητών για την προβλεψιμότητα.

2. Μαγνητικό εκκρεμές: Οι καταγραφές πριν την εκτέλεση του πειράματος δεν επιβεβαιώθηκαν στη συνέχεια, αντίθετα η εξέλιξη των αιωρήσεων αποδείχθηκε απρόβλεπτη κάνοντας μεγάλη εντύπωση στους μαθητές. Οι μαθητές εγκατέλειψαν απρόθυμα την πρόβλεψή τους και αφού έκαναν πολλές προσπάθειες διατήρησης της δυνατότητας πρόβλεψης και της αιτιοκρατίας στην εκτέλεση του πειράματος. Όλες οι καταγραφές για τη δυνατότητα πρόβλεψης του πειράματος μετά την εκτέλεσή του ήταν αντίθετες με τις καταγραφές των ίδιων των μαθητών πριν την εκτέλεση, δείχνοντας το βάθος της εποικοδομητικής γνωστικής σύγκρουσης στο σημείο (Steffe, L. P., 1983, Ψύλλος, Δ. 2000). Η αιτιολόγηση του αποτελέσματος του πειράματος με αναφορά στην εξάρτηση από διαφορές αρχικών θέσεων, δόθηκε από δυο μόνο μαθήτριες.

γ. Μαγνητικό εκκρεμές με χρώματα: Όπως αναφέρθηκε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων τα χρώματα δεν ανέδειξαν την ιδανική εικόνα τύπου Υ (εικόνα 2).

Ενδιαφέρουσες ήταν και οι επιστημολογικές προεκτάσεις των απόψεων των μαθητών στο τέλος της συνέντευξης-πειράματος (παράρτημα Β).

5. Τελικά αποτελέσματα της μελέτης περίπτωσης

1. Το ενδιαφέρον των μαθητών του τμήματος της παρέμβασης ήταν πολύ μεγάλο όπως προκύπτει από τις καταγραφές και επεκτάθηκε τις επόμενες μέρες τόσο στους μαθητές των άλλων τμημάτων της Γ΄ τάξης του γυμνασίου αυτού, όσο και στον διευθυντή του σχολείου και στους καθηγητές φυσικής και μαθηματικών του σχολείου. Η δραστηριότητα που κέντρισε περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών στην παρέμβαση ήταν τελικά η νέα δραστηριότητα της διάστασης

αυτοομοιότητας (δραστηριότητα Δ). Για τους μαθητές όμως που πήραν μέρος στη συνέντευξη και το πείραμα, το πιο ενδιαφέρον ήταν το μαγνητικό εκκρεμές.

2. Τα ποιοτικά αποτελέσματα των δραστηριοτήτων Α και Β δε διέφεραν πολύ από αυτά των πιλοτικών παρεμβάσεων με πολλές παρόμοιες καταγραφές και αιτιολογήσεις. Μάλιστα οι εξηγήσεις των μαθητών για την εμφάνιση του τριγώνου Sierpinski στο παιχνίδι του χάους ήταν πιθανώς εξ αιτίας της πίεσης χρόνου λιγότερες από τις αντίστοιχες στις πιλοτικές παρεμβάσεις. Αποφασίσαμε, σε κάθε επόμενη παρέμβαση να δοθεί περισσότερος διαθέσιμος χρόνος για την εκτέλεση της δραστηριότητας αυτής.

3. Οι νέες δραστηριότητες Γ και Δ εκτελέστηκαν από τους μαθητές σε ποσοστά 85% και 60-75% σωστά αντίστοιχα, όπως προαναφέρθηκε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Τα ποσοστά ήταν ιδιαίτερα υψηλά κατά τη γνώμη μας, ενθαρρυντικά για μια συστηματική διδακτική παρέμβαση με τους νέους γνωστικούς στόχους σε όλα τα επόμενα γυμνάσια. Η ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων στα πλαίσια της σπουδής περίπτωσης (με έμφαση στην οπτική των μαθητών), φάνηκε ιδιαίτερα χρήσιμη στο σημείο αυτό διότι:

α. Ο καταγραφές στη δραστηριότητα Γ ανέδειξαν νέα χαρακτηριστικά (*π.χ. γεννήτρια*) και οι απομαγνητοφωνήσεις νέους τρόπους σκέψεις των μαθητών (*αναζήτηση προοπτικής-κίνησης*).

β. Έδειξαν ότι η έννοια *αυτοομοιότητα* αποδίδεται από τους μαθητές με πολλούς σωστούς τρόπους, αποδείχθηκε όμως δύσκολο να δοθεί στην παρέμβαση αυτούσια η λέξη.

γ. Οι περισσότεροι μαθητές δεν είχαν πρόβλημα να διαπιστώσουν την ταύτιση του εκθέτη του λόγου ομοιότητας σχημάτων με τη διάσταση των σχημάτων αυτών (75%). Οι απομαγνητοφωνήσεις όλης της τάξης και ειδικά της ομάδας που προαναφέρθηκε, έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρχικά με αμηχανία το ενδεχόμενο δεκαδικού εκθέτη, αλλά προσπαθούν στη συνέχεια να το αιτιολογήσουν βασιζόμενοι στις γνώσεις τους.

Η εννοιολογική αλλαγή γεωμετρική διάσταση-μη ακέραια διάσταση αυτοομοιότητας θα έπρεπε να διερευνηθεί περισσότερο. Μελλοντικές παρεμβάσεις σε μεγαλύτερο δείγμα γυμνασίων, όπου οι δραστηριότητες Γ και Δ θα ενσωματωθούν με βελτιώσεις στον κεντρικό κορμό της παρέμβασης ήταν για τον σκοπό αυτό απαραίτητες.

6. Με το μαγνητικό εκκρεμές διαπιστώθηκε γνωστική σύγκρουση και εννοιολογική αλλαγή της δυνατότητας πρόβλεψης από όλους τους μαθητές. Όπως αναφέρθηκε όμως στην ανάλυση των αποτελεσμάτων, τα χρώματα δεν ανέδειξαν την ιδανική εικόνα τύπου Y και την εσωτερική τάξη της απεικόνισης της αιώρησης λόγω τεχνικών περιορισμών στην εκτέλεση του πειράματος. Η διαθεματική γέφυρα με τη φυσική που επιδιώχθηκε με τη συνέντευξη πείραμα, είχε για το λόγο αυτό μερική μόνο επιτυχία. Παρόλα αυτά η γνωστική σύγκρουση και εννοιολογική αλλαγή για τη δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης του μαγνητικού εκκρεμούς, έχουν άμεση σχέση με την αντίστοιχη γνωστική σύγκρουση στο παιχνίδι του χάους της διδακτικής μας παρέμβασης. Αυτοί οι παράλληλοι γνωστικοί στόχοι επετεύχθησαν σε μεγάλο βαθμό. Περαιτέρω όμως διαθεματική διερεύνηση στο σημείο αυτό θα ξέφευγε από το πλαίσιο της εργασίας μας και δεν θα ήταν εφικτή στο χρονικό πλαίσιο των παρεμβάσεων μας.

7. Οι πιλοτικές παρεμβάσεις της έρευνας δράσης και η σπουδή περίπτωσης του συγκεκριμένου γυμνασίου, ανέδειξαν τη δυνατότητα επίτευξης αλλά και τα όρια του ερευνητικού μας στόχου. Η σπουδή περίπτωσης ειδικότερα έδειξε τον τρόπο σκέψης των μαθητών σχετικά με τους γνωστικούς στόχους μας, (με έμφαση ως προς τη διάσταση αυτοομοιότητας) και αποτέλεσε με τον τρόπο αυτό την παρέμβαση κλειδί για τη συνέχεια της έρευνάς μας. Με το πέρας των δυο πρώτων φάσεων της έρευνας (έρευνα δράσης και σπουδή περίπτωσης) η ποιοτική διερεύνηση των παρεμβάσεων είχε σε κάποιο βαθμό ολοκληρωθεί.

Η επόμενη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε μεγάλο δείγμα γυμνασίων. Στο σημείο αυτό ήταν εμφανές ότι για τη διαμόρφωση της τελικής μας πρότασης διδακτικής αξιοποίησης απαιτείται μια συστηματικότερη μεθοδολογική προσέγγιση για συλλογή και στατιστική επεξεργασία των δεδομένων μας. Ταυτόχρονα όμως δεν έπρεπε να αποκλειστεί η ποιοτική ανάλυση των κύριων δεδομένων των γνωστικών μας στόχων.

ΚΕΦ. VII
Θεμελιωμένη θεωρία
Πρώτο μέρος έρευνας: Ανοιχτή κωδικοποίηση

Η Θεμελιωμένη Θεωρία (Grounded Theory) των Glaser, B. G.& Strauss, A. L (1967) είναι ερευνητική μεθοδολογία που συνδυάζει ποσοτικά (στατιστικά) δεδομένα, δίνοντας ταυτόχρονα ενδείξεις ποιοτικής ανάλυσης των δεδομένων αυτών (Glaser, B. G., 1992). Είναι μια γενική μεθοδολογική προσέγγιση για την ανάπτυξη (επαγωγικά) μιας θεωρητικής πρότασης, που θεμελιώνεται στα δεδομένα που συλλέγονται και αναλύονται συστηματικά. Πρόκειται για μια ποιοτική κυρίως μέθοδο συνδυαστικής ανάλυσης, η οποία χαρακτηρίζεται από ευελιξία, συνεχή έλεγχο και ανατροφοδότηση των υποθέσεων (Strauss, A.L., Corbin, J. 1994). Η παραπάνω πορεία διερεύνησης ταυτίζεται σε γενικές γραμμές με την πορεία της διερεύνησης του στόχου μας. Με συνεχή ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των καταγραφών των μαθητών και με ανατροφοδότηση των φύλλων εργασίας από τα νέα ερευνητικά δεδομένα, αναπτύσσεται (θεμελιώνεται) η τελική μορφή της διδακτικής μας πρότασης στα πλαίσια του ερευνητικού μας στόχου.

Οι κύριες αδυναμίες της Θεμελιωμένης Θεωρίας (Strauss, A.L., Corbin, J. 1994), όπως και κάθε μεικτής μεθοδολογίας η οποία βασίζεται σε ποσοτική έρευνα και καταλήγει να αναζητά στην ποιοτική έρευνα την εξήγηση των αποτελεσμάτων (Χαλκιά, Κ. 2005, Pandit N. R. 1996, Cohen, L. Manion, L. 1997) είναι:

1. Να παρασυρθεί ο ερευνητής από δικές του στάσεις και να επιλέξει εργαλεία και μελέτη μεταβλητών που θα αντιπροσωπεύουν περισσότερο τη δική του άποψη παρά την αντικειμενικά ενδεδειγμένη.

2. Να επιλεγούν κλειστές ερωτήσεις στα ερωτηματολόγια όπως προκύπτουν από την αρχική ποσοτική έρευνα, διευκολύνοντας την επεξεργασία

τους αλλά με απώλειες απόψεων-στάσεων των μαθητών που διαφεύγουν από τη διαίσθηση του ερευνητή.

Για να περιοριστούν οι αδυναμίες αυτές πραγματοποιήθηκε εκτενής έρευνα σε πολλά γυμνάσια τα έτη 2006 έως και 2009 προκειμένου τα ερευνητικά δεδομένα να είναι όσο το δυνατόν αντικειμενικά (κεφάλαια VIII, IX). Ακόμη σχεδιάστηκαν τα φύλλα εργασίας, οι συνεντεύξεις κ.λπ. κύρια με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου και ακολούθησε τυπική μελέτη και σύγκριση των αποτελεσμάτων με προηγούμενες έρευνες σχετικές με το θέμα μας (κεφάλαια VII, X).

Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα εφαρμογής της Θεμελιωμένης Θεωρίας σε έρευνες διδακτικής των θετικών επιστημών, π.χ. η έρευνα του πανεπιστήμιου Georgia Η.Π.Α. για αντιλήψεις μαθητών για την πτώση των σωμάτων και τις εννοιολογικές αλλαγές αυτών των αντιλήψεων (Hynd, C.R., McNish M. M. 2001), η επίγνωση των φυσικών φαινόμενων σε διαφορετικό μαθησιακό περιβάλλον (Spector B.S., Gibson, C.W., 1991) κ.α.

Στην περίπτωσή μας η ανάλυση των δεδομένων μας, άρχιζε από την πρώτη επαφή μας με τους μαθητές και συνεχιζόταν με συνεχή σύγκριση των νέων δεδομένων μέχρι την τελική ανάπτυξη της θεωρητικής πρότασης (Jonson, B. Christensen, L. 2008). Με τον τρόπο αυτό οι καταγραφές στα φύλλα εργασίας, που αποτελούν εργαλείο επίτευξης των γνωστικών στόχων των δραστηριοτήτων, είναι ταυτόχρονα και εργαλείο συλλογής δεδομένων για ανατροφοδότηση του σχεδιασμού τους. Οι καταγραφές των μαθητών των ετών 2006, 2007 γίνονταν αντικείμενο συνεχούς επεξεργασίας και σύγκρισης (*constant comparative method*, Jonson, B. Christensen L. 2008) με τα αποτελέσματα της αρχικής μας διερεύνησης των ετών 2005, 2006 (έρευνα δράσης και μελέτη περίπτωσης), καθώς και με τα αποτελέσματα των τελικών παρεμβάσεων στην ολοκληρωμένη τους μορφή στα έτη 2008, 2009. Παράλληλα πριν την παρέμβαση, -και δοθείσης της δυνατότητας- επαναλαμβάνονταν οι συνεντεύξεις της έρευνας δράσης για τις απόψεις των μαθητών με τη διαφορά ότι οι συνεντεύξεις εμβάθυναν περισσότερο στις απόψεις των μαθητών για τις έννοιες τρίγωνο, άπειρο, διάσταση, δυνατότητα πρόβλεψης κ.α., όπως αναδείχθηκαν στις παρεμβάσεις μας και παρατίθενται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Η ανάλυση των δεδομένων στη Θεμελιωμένη Θεωρία ακολουθεί τρία στάδια (Strauss, A.L., Corbin, J. 1994, Jonson B. Christensen, L. 2008). Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρατίθεται το πρώτο στάδιο **ανοιχτή κωδικοποίηση** (ποιοτική ανάλυση των κύριων δεδομένων). Το δεύτερο στάδιο **κάθετη κωδικοποίηση** (ποσοτική επεξεργασία) και το τρίτο στάδιο **επιλεκτική κωδικοποίηση** (συγκεντρωτικά αποτελέσματα και επιλογή τους) παρουσιάζονται λόγω της ευρύτητάς τους στα δύο επόμενα κεφάλαια (κεφάλαιο VIII και IX). Τα κεφάλαια αυτά όπως και ο **θεωρητικός κορεσμός** και η τελική πρόταση (κεφάλαιο X) αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της Θεμελιωμένης Θεωρίας όπως την εφαρμόσαμε στην έρευνά μας.

1^{ο} στάδιο: Ανάλυση τύπου ανοιχτής κωδικοποίησης (open coding). Ποιοτική ανάλυση των κύριων δεδομένων

Στο πρώτο στάδιο ανάλυσης των δεδομένων της Θεμελιωμένης Θεωρίας, αναγνωρίζονται τα σημαντικότερα διακεκριμένα δεδομένα για την έρευνα, αναδεικνύονται και κωδικοποιούνται (Jonson, B. Christensen, L. 2008). Στην περίπτωσή μας τα δεδομένα αυτά προκύπτουν από τις καταγραφές των μαθητών στα φύλλα εργασίας, τις απομαγνητοφωνήσεις, τις αρχικές συνεντεύξεις κ.λπ. και αναδεικνύουν τις απόψεις τους που σχετίζονται με τον ερευνητικό στόχο μας. Τα δεδομένα μας αυτά παρατίθενται και αναλύονται πιο κάτω σε 13 ετικέτες (**κωδικοί,** για να διατηρήσουμε την ονοματολογία της Θεμελιωμένης Θεωρίας):

1.1 Κωδικός Α: Δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης του συστήματος.

Από την έρευνα δράσης ήδη προέκυψαν πολλές αντιφατικές καταγραφές σχετικά τη δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος. Οι καταγραφές αυτές αφορούν άμεσα τον πρώτο γνωστικό μας στόχο δηλαδή τη διαπίστωση της μη προβλεψιμότητας της εξέλιξης του παιχνιδιού του χάους. Συγκεκριμένα οι μαθητές απαντούν στην ερώτηση (κεφάλαιο X.1):

Διάβασε προσεχτικά τους κανόνες του παιχνιδιού. Αν επαναλάβουμε αρκετές φορές το βήμα 2, τι νομίζεις ότι θα συμβεί;

Στη βιβλιογραφία οι απόψεις των μαθητών για τη δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος έχουν μελετηθεί στη φυσική (Komorek, M. 1997, Duit R. 1997, Stayrou D. 2002, 2005, 2008 και 2013, Stavrou, D., Assimopoulos, S. & Skordoulis, C. 2013, Stavrou, D. & Duit, R. 2014 κ.α.) και στα μαθηματικά (Peitgen H. O., 1992 a,b, Devaney, R. 1990. Nemirovsky, R. 1993 κ.α.). Από τις έρευνες διαπιστώθηκε η αποδοχή από πλευράς των μαθητών της έννοιας της αιτιοκρατίας στα φαινόμενα των θετικών επιστημών, η οποία και οδηγεί τους μαθητές σε μια νομοτελειακή αποδοχή του αποτελέσματος κατά την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος στις θετικές επιστήμες.

Ακόμη στις ίδιες έρευνες τονίζεται η σύνδεση της κανονικότητας στην εξέλιξη του δυναμικού συστήματος με τις απόψεις των μαθητών για τη δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος. Για τον σκοπό αυτό έχει μεγάλη σημασία η δυνατότητα της (συνεχούς και ακριβούς) επανάληψης. Το σημείο αυτό αφορά άμεσα και τη δική μας δραστηριότητα που αναφέρεται ευθύς εξ αρχής σε κανόνες του παιχνιδιού και στη σταθερή επανάληψή τους. Στις έρευνες που προαναφέρθηκαν, οι μαθητές με μία σειρά πειραμάτων και συνεντεύξεων, δέχονται τελικά (αλλά όχι απόλυτα) τη δημιουργία πολύπλοκης συμπεριφοράς ακόμη και από απλούς αρχικούς κανόνες και την αδυναμία πρόβλεψης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος ακόμη και σε ιδεατές συνθήκες, αποδέχονται δηλαδή ουσιαστικά ότι η ισχυρή αιτιοκρατία δεν ισχύει πάντα.

Στη δική μας έρευνα, οι απόψεις των μαθητών αναφέρθηκαν στην αποδοχή δυνατότητας πρόβλεψης γενικά (κωδικός Α) και ειδικότερα στην δυνατότητα πρόβλεψης σχηματισμού ενός ή περισσοτέρων τριγώνων (κωδικός Α1), καθώς και στη μη αποδοχή δυνατότητας πρόβλεψης (κωδικός Β).

Οι παραπάνω έννοιες είναι οι πρώτες που ερευνήσαμε αναλυτικά. Συγκεκριμένα κατά την έρευνα μας σε 15 γυμνάσια μεταξύ 2006 και 2009 εμφανίστηκαν συνολικά 110 (Α+Β+ Άλλο) σχετικές καταγραφές:

Α. Δυνατότητα πρόβλεψης γενικά	*Α1 Δυνατότητα πρόβλεψης τριγώνου*	*Β Αδ ύνατη πρόβλεψη*	*Άλλ ο*
60 ομάδες	*32 ομάδες*	*42 ομάδες*	*8 ομάδες*

Πίνακας 1. Αποδοχή δυνατότητας πρόβλεψης.

Η στήλη «άλλο» περιλαμβάνει καταγραφές του τύπου *δεν ξέρω*.

Από τις 60 ομάδες που κατέγραψαν ότι μπορούν να προβλέψουν την εξέλιξη του παιχνιδιού, οι 32 ομάδες κατέγραψαν την πρόβλεψη εμφάνισης τριγώνου ή τριγώνων. Αποτελούν τη συχνότερη καταγραφή πρόβλεψης συγκεκριμένου σχήματος. Υπάρχουν ελάχιστες καταγραφές που αναφέρονται σε άλλα γεωμετρικά σχήματα (πολύγωνα), και για το λόγο αυτό δε δημιουργήθηκε χωριστή στήλη για αυτές στον παραπάνω πίνακα.

Ωστόσο η αποδοχή της δυνατότητας πρόβλεψης γενικά ή ειδικότερα η πρόβλεψη εμφάνισης κάποιων τριγώνων δεν αιτιολογήθηκε πάντα από τους μαθητές. Μόνο 32 ομάδες προσπάθησαν να αιτιολόγησαν την καταγραφή τους, ενδεικτικά: *Πιστεύω θα σχηματιστούν πολλά όμοια τρίγωνα καθώς τα σημεία που θα προκύψουν προέρχονται με τους κανόνες του παιχνιδιού από το τρίγωνο ABC.*

Η πρόβλεψη εμφάνισης τριγώνου εξηγείται από τους μαθητές στις καταγραφές τους σε μεγάλο βαθμό από το ισόπλευρο τρίγωνο στο εσωτερικό του οποίου θα παίξουν το παιχνίδι καθώς και από τους κανόνες του παιχνιδιού, επιβεβαιώνοντας τη σχέση κανόνων και δυνατότητας πρόβλεψης που αναφέρθηκε στην πιο πάνω βιβλιογραφία.

1.2 Κωδικός Β: Αδύνατη πρόβλεψη της εξέλιξης του συστήματος.

Η αδυναμία πρόβλεψης είναι συνδεδεμένη στις αντιλήψεις των μαθητών με την τυχαιότητα. Ο Piaget μελέτησε την έννοια «τυχαιότητα» για μικρότερους ηλικιακά μαθητές, όπου διαπίστωσε τα χαρακτηριστικά που τη διαφοροποιούν από τις έννοιες της σταθερότητας και διατήρησης ύλης, βάρους, όγκου ή του αριθμού.

Από έρευνες σχετικές με τη μη γραμμικότητα (Σταύρου, Δ. 2004, 2005, 2008, 2014), ειδικότερα στο *Ντετερμινισμός και τυχαιότητα στη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων* (Σταύρου, Δ. Komorek, M. Duit R., 2002), διαπιστώθηκε ακόμη πολλαπλότητα ορισμών των μαθητών για την έννοια της τυχαιότητας. Υπό την έννοια «τυχαιότητα» οι μαθητές καταλαβαίνουν, για παράδειγμα, το μη προβλέψιμο, αυτό που δεν μπορεί να υπολογιστεί, αυτό που δεν υπακούει σε νόμους, το ακανόνιστο, το αναίτιο, το απροσδόκητο, αυτό που δεν περιμέναμε, αυτό που συμβαίνει απρογραμμάτιστα, αυτό που δε μπορεί να καθοριστεί, αυτό που δεν μπορούμε να επηρεάσουμε, αυτό που προκαλεί έκπληξη, αυτό που συμβαίνει ξαφνικά, αυτό που συμβαίνει χωρίς πρόθεση, αυτό που δεν μπορούμε να εξηγήσουμε.

Από τις παραπάνω έννοιες ιδιαίτερη εμβάθυνση γίνεται στην έννοια σύμπτωση, γιατί η σύμπτωση σχετίζεται τελικά με την εξέλιξη ενός ασταθούς δυναμικού συστήματος (Σταύρου, Δ. Komorek M, Duit R. 2005). Η έννοια σύμπτωση ορίζεται σύμφωνα με τους μαθητές ποικιλοτρόπως: Μια στατιστική ανισοκατανομή, μια σειρά ανατροπών κυρίως που επηρεάζουν το αποτελέσματα, κάτι το μαθηματικά απίθανο. Γενικά η σύμπτωση γίνεται αποδεκτή από τους μαθητές σαν έννοια ασυμβίβαστη με το επιστημολογικό πλαίσιο των θετικών επιστημών (Komorek M, Duit R. 1997).

Μια πιο εξειδικευμένη έρευνα (Σταύρου, Δ. 2002) κατηγοριοποιεί τις απόψεις των μαθητών της 11ης τάξης του γερμανικού σχολείου σε δυο κατηγορίες: «Επιστημική» ή «οντική», δηλαδή σαν αναπόσπαστο κομμάτι της θεωρίας και της πραγματικότητας ή σαν εξαίρεση, ανατροπή της κλασικής αιτιοκρατίας. Στην παραπάνω έρευνα τονίζεται η δυνατότητα κατανόησης και χρήσης της σχέσης σύμπτωσης και νομοτέλειας για τη διδακτική προσέγγιση μη γραμμικών (χαοτικών) δυναμικών συστημάτων. Για τον σκοπό αυτό οι μαθητές γερμανικού σχολείου ασχολήθηκαν στην έρευνα με πειράματα μη γραμμικότητας στη φυσική. Σύμφωνα με την παραπάνω έρευνα το κυριότερο από τα κριτήρια με τα οποία ορίζουν οι μαθητές την έννοια της τυχαιότητας είναι το να μην είναι προβλέψιμο το σύστημα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα λάβαμε υπόψη μας στην επιλογή του παιχνιδιού τυχαιότητας της δραστηριότητας Α που χρησιμοποιούμε. Ωστόσο στη δική μας περίπτωση η παραπάνω δραστηριότητα (και όλη η έρευνα μας) αφορά τα μαθηματικά στη γενική εκπαίδευση (βλ. κεφ. Χ, τελική πρόταση). Ακόμη ότι το δείγμα των δικών μας μαθητών ήταν κατά 2 έτη μικρότερης ηλικίας.

Στην περίπτωσή μας, 42 ομάδες κατέγραψαν αδυναμία πρόβλεψης του αποτελέσματος στο παιχνίδι του χάους (Πίνακας 1), με 11 μόνο αιτιολογήσεις αναφερόμενες εξ ολοκλήρου στην τυχαιότητα, ενδεικτικά:

Δε θα σχηματιστεί τίποτα γιατί είναι τυχαίες οι κουκίδες.

Δε θα σχηματιστεί τίποτα συγκεκριμένο γιατί παίζουμε με ζάρι.

1.3 Κωδικός Γ: Άπειρο

Η έννοια «άπειρο» στις απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας εμφανίζεται συχνά στις δραστηριότητα Β, Γ, Δ και Ε, (εμφανίζονται 300 περίπου σχετικές καταγραφές). Αυτό διαφάνηκε ήδη από το πρώτο στάδιο της έρευνας δράσης μας και σχεδιάσαμε σχετική συνέντευξη για την έννοια αυτή. Στη συνέχεια και μέχρι το τέλος των παρεμβάσεων το 2009, σε όποιο γυμνάσιο υπήρχε χρονική δυνατότητα επαναλαμβανόταν οι συνεντεύξεις με τους μαθητές της Γ΄ γυμνασίου για την έννοια αυτή.

Η εργασία των Piaget και Inhelder (1956) *The child's Conception of Space* μπορεί να θεωρηθεί η αρχή των ερευνών για την κατανόηση των αντιλήψεων των παιδιών (κύρια μικρότερης ηλικίας) για την έννοια του απείρου. Για παιδιά άνω των 11 ετών το άπειρο μπορεί να γίνει αντιληπτό σαν πολύ μεγάλο σύνολο αντικειμένων ή σημείων (π.χ. κόκκοι άμμου, σκόνη). Η βιβλιογραφία (Fischbein, E. Tirosh, D Hess, P.1979, Σπηλιοπούλου, Χ., 2004) αναφέρει ακόμη τον περιφραστικό τρόπο με τον οποίο χαρακτηρίζουν το άπειρο οι μαθητές σαν επαναλαμβανόμενη διαδικασία, αλλά και σαν αδυναμία μέτρησης μεγάλου αριθμοσυνόλου. Ο Monaghan εξέτασε τις αντιλήψεις μαθητών 16-18 χρονών για το άπειρο και κατέληξε στο ότι έννοια των μαθητών για το άπειρο είναι εγγενώς αντιφατική και ασταθής: Μπορεί να αποδοθεί σαν διαδικασία, κάτι το οποίο συνεχίζεται διαρκώς, αλλά μπορεί να αποδοθεί και ως πολύ μεγάλος αριθμός (πάνω από κάθε όριο), ή ως σύνολο αμέτρητων αντικειμένων. Η κύρια αντίληψη όμως είναι αυτή της διαδικασίας: *Αυτό συνεχίζεται συνέχεια, άρα είναι άπειρο* (Monaghan, J. 1986).

Η αντίληψη αυτή ταυτίζεται με τις σχετικές διαπιστώσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας μας.

Μια ενδιαφέρουσα έρευνα των Fischbein, E. Tirosh, D. Hess, P. (1979) *The Intuition of Infinity* καθώς και νεότερες έρευνες που ακολούθησαν, τονίζουν την ισχυρή αρχική διαισθητική αντίληψη των μαθητών για το άπειρο, καθώς και το ότι οι σχετικές παρανοήσεις τους είναι παρόμοιες σε όλες τις ηλικίες.

Μια πρόσφατη έρευνα στην Ελλάδα σε μαθητές άνω των 16 ετών *Αντιλήψεις μαθητών για το άπειρο (*Σπηλιοπούλου Χ., 2004), επιβεβαιώνει την αντιφατικότητα της έννοιας του άπειρου στις αντιλήψεις των μαθητών λυκείου, τόσο ως διαδικασία όσο και ως αριθμό. Οι απόψεις αντιφάσκουν στο αν είναι πολύ μεγάλος αλλά πεπερασμένος αριθμός ή κάτι αμέτρητο. Η αντίφαση αυτή δεν εξαλείφεται εύκολα και σε μεγαλύτερες τάξεις.

Στη δική μας περίπτωση ήδη από την αρχική έρευνα δράσης η πιο συνηθισμένη άποψη των μαθητών για την έννοια ήταν: *Το άπειρο υπάρχει επειδή οι αριθμοί επαναλαμβάνονται συνέχεια, δεν τελειώνουν ποτέ.*

Η άποψη περιέχει τόσο τη διαδικασία της συνεχούς επανάληψης όσο και το γεγονός ότι οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ. Στο 5ο γυμνάσιο Βόλου (24 μαθητές σε 12 ομάδες) πραγματοποιήθηκε η τελευταία διερεύνηση της άποψης των μαθητών για την έννοια «άπειρο». Οι απαντήσεις κατηγοριοποιημένες έχουν ως εξής:

	Καταγραφές ομάδων	Ποσοστό επί συνόλου ομάδων	Μονοσήμαντες ή αντιφατικές καταγραφές
Διαδικασία χωρίς τέλος	*7*	60 %	*2*
Αμέτρητο ή αδύνατο να μετρηθεί	*3*	25 %	
Με διαρκή επανάληψη, συνέχεια για πάντα	*8*	66 %	*1*

Πίνακας 2. Η έννοια άπειρο σε συνέντευξη μαθητών, Βόλος 2009.

Οι απαντήσεις αλληλεπικαλύπτονται σε πολλές περιπτώσεις. Υπάρχει μια μόνο καταγραφή όπου αναφέρεται*: Ένα πράγμα που δεν τελείωνε ποτέ*. Όλες οι άλλες καταγραφές αναφέρονται στις έννοιες του παραπάνω πίνακα. Σε τρεις περιπτώσεις καταγραφών εμφανίζεται αντίφαση: *Αμέτρητες, δύσκολο να μετρηθούν*.

Γενικά η μεγάλη πλειοψηφία των καταγραφών των ομάδων (οχτώ στις δώδεκα ομάδες, 66%), απέδωσαν πλήρως την έννοια σαν χωρίς τέλος και συνεχή επανάληψη μιας διαδικασίας.

1.4 Κωδικός Δ: Επαναληπτικότητα.

Η έννοια της επαναληπτικότητας είναι πρωταρχικής σημασίας στην έρευνά μας, ειδικότερα στα κλασματειδή σχήματα της γεωμετρίας που χρησιμοποιούμε. Υπάρχουν πολλές προτάσεις στο διαδίκτυο και στη βιβλιογραφία για τη διδασκαλία των κλασματοειδών σχημάτων, οι σημαντικότερες των οποίων έχουν αναφερθεί στο κεφάλαιο ΙΙΙ. Στις προτάσεις αυτές τα χαρακτηριστικά των κλασματοειδών σχημάτων διερευνώνται επιλεκτικά κάποια από τα ακόλουθα: Επαναληπτικότητα, γεννήτρια, αυτοομοιότητα, ανεξαρτησία από κλίμακα, ιδιαίτερα τοπολογικά χαρακτηριστικά κ.α. Συνήθως προτείνονται παραδείγματα απλοποίησης κάποιων χαρακτηριστικών για τη διδασκαλία (κεφάλαιο ΙΙΙ.1) στη διδακτική πρόταση (π.χ. η ανεξαρτησία υπό κλίμακα τονίστηκε ιδιαίτερα στο κλασικό σύγγραμμα: *How long is the coast of England, Mandelbrot. B.* 1967, η αυτοομοιότητα στο *Learning process studies in the field of fractals* Komorek M, et al 1998, 2001). Από τα παραπάνω χαρακτηριστικά εμείς επιλέξαμε την επαναληπτικότητα και την αυτοομοιότητα σαν τα κύρια χαρακτηριστικά των κλασματοειδών σχημάτων αλλά και των μη γραμμικών συστημάτων γενικότερα (κεφάλαιο ΙΙΙ.1). Οι εξειδικευμένες έρευνες για τις απόψεις των μαθητών για τα παραπάνω, ειδικότερα για την ηλικία που μας ενδιαφέρει είναι ελάχιστες στη βιβλιογραφία.

Στη δική μας περίπτωση από την αρχική έρευνα δράσης μας ακόμη, η επαναληπτικότητα ορίστηκε από τους μαθητές σαν διαδικασία χωρίς τέλος επαναλήψεων. Στα φύλλα εργασίας μας για το βασικό χαρακτηριστικό του παιχνιδιού και της νέας γεωμετρίας στις δραστηριότητες Α, Β, Γ, Δ, υπάρχουν συνολικά 400 καταγραφές που αναφέρονται σε επαναληπτικότητα. Οι περισσότερες από αυτές χρησιμοποιούν τη λέξη *άπειρο* (κωδικός Γ) με την έννοια της *χωρίς τέλος συνεχιζόμενης διαδικασίας*. Η παραπάνω αντίληψη των μαθητών βρίσκεται πολύ κοντά στην έννοια επαναληπτικότητα (iteration) της θεωρίας, (κεφάλαιο ΙΙ της εργασίας καθώς και Peitgen H.O, a,b), που αποτελεί και γνωστικό στόχο στις δραστηριότητες Β και Γ.

1.5 Κωδικός Ε: Αυτοομοιότητα.

Ο πρώτος ο οποίος προσπάθησε να διερευνήσει τις αντιλήψεις και τους μηχανισμούς δόμησης της ομοιότητας στους μαθητές ήταν ο Piaget. Στο έργο του Childs conceptions of space (Piaget, J. Inhelder, B., 1967) αποδίδει σε αισθητοαντιληπτικές διαδικασίες και σχετικές δράσεις την ανάπτυξη της έννοιας της ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων: *Τα παιδιά που δεν ασχολήθηκαν ποτέ με σχετικές δράσεις δεν καταφέρνουν να δομήσουν ποτέ την έννοια της ομοιότητας*. Στις έρευνες που ακολούθησαν επιβεβαιώθηκαν τα παραπάνω, ειδικότερα διαπιστώθηκε ότι η χρήση της έννοιας *όμοιος* στην καθημερινή γλώσσα δεν ταυτίζεται υποχρεωτικά με την έννοιας της γεωμετρικής ομοιότητας αλλά κατηγοριοποιείται με βάση το κριτήριο *μεγάλο όμοιο με μικρό.* (Vollrath H. J.

1977). Το συμπέρασμα για τη διδακτική είναι ότι πρέπει να τονιστεί η ταύτιση της γεωμετρικής ομοιότητας με τη σχέση σμίκρυνση-μεγέθυνση. Σε έρευνα στην ελληνική εκπαίδευση διαπιστώθηκε ότι η έννοια της ομοιότητας ακόμη και από τους μαθητές λυκείου παραμένει καθαρά αισθητοαντιληπτική και οι μαθητές δεν προβαίνουν σε σχετικούς υπολογισμούς, ούτε συνδέουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος με σταθερές αναλογίες. Ακόμη και φοιτητές του μαθηματικού κατά 50% δεν χρησιμοποιούν την έννοια σταθερής αναλογίας για ακριβή απάντηση (Κεΐσογλου, Σ. Σπύρου, Π. 2003).

Στη δική μας περίπτωση τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογή στη δραστηριότητα Β, όπου ζητούμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν επαναλήψεις με βάση την ομοιότητα τριγώνων, με τον επιπλέον στόχο της διαπίστωσης της ομοιότητας με το αρχικό σχήμα. Υπάρχουν στη βιβλιογραφία αρκετές προτάσεις για τη διδασκαλία της έννοιας της αυτοομοιότητας κύρια σε μεγαλύτερους μαθητές (Peitgen, H. O. 1992a,b, Devaney R.1990, Komorek M, et all 1998 κ.α. Sandefur. J. T. 1996). Ειδικότερα προτείνεται προσέγγιση των βασικών χαρακτηριστικών των κλασματοειδών σχημάτων (και της αυτοομοιότητας) με εικόνες τέτοιων σχημάτων (Komorek M, et all 1998, Sandefur. J. T. 1996). Στη δραστηριότητα Γ επιδιώκουμε μια ανάλογη προσέγγιση. Συνολικά στις δραστηριότητες Β, Γ και Δ έχουμε 220 καταγραφές των μαθητών μας που αφορούν την αυτοομοιότητα, ενδεικτικά παραδείγματα:

α. *Γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό* β. *Ένα μεγάλο σχήμα όμοιο με τα κομμάτια του* γ. *Επαναλαμβανόμενη ομοιότητα,*

Οι ορισμοί αυτοί είναι πολύ κοντά στον ορισμό της αυτοομοιότητας κλασματοειδών (fractal) σχημάτων από τη βιβλιογραφία (Peitgen H. O., 1992 a,b).

Ο ορισμός της αυτοομοιότητας εμπεριέχει την επαναληπτικότητα (καθώς και τη γεννήτρια) των σχημάτων. Αυτό φάνηκε και στα φύλλα εργασίας όπου οι σχετικές καταγραφές αλληλεπικαλύπτονται στην πλειοψηφία τους. Στη δραστηριότητα Γ, για παράδειγμα, σημειώθηκαν συνολικά 88 καταγραφές που διαπίστωναν την επαναληπτικότητα των εικόνων, αλλά σε 61 από αυτές εμφανίζεται τόσο η επαναληπτικότητα όσο και η αυτοομοιότητα. Στις υπόλοιπες

27 καταγραφές της δραστηριότητας διαπιστώθηκε η επαναληπτικότητα ως η *χωρίς τέλος* ή η *άπειρη επανάληψη των εικόνων*.

1.6 Κωδικός ΣΤ: Τρίγωνο

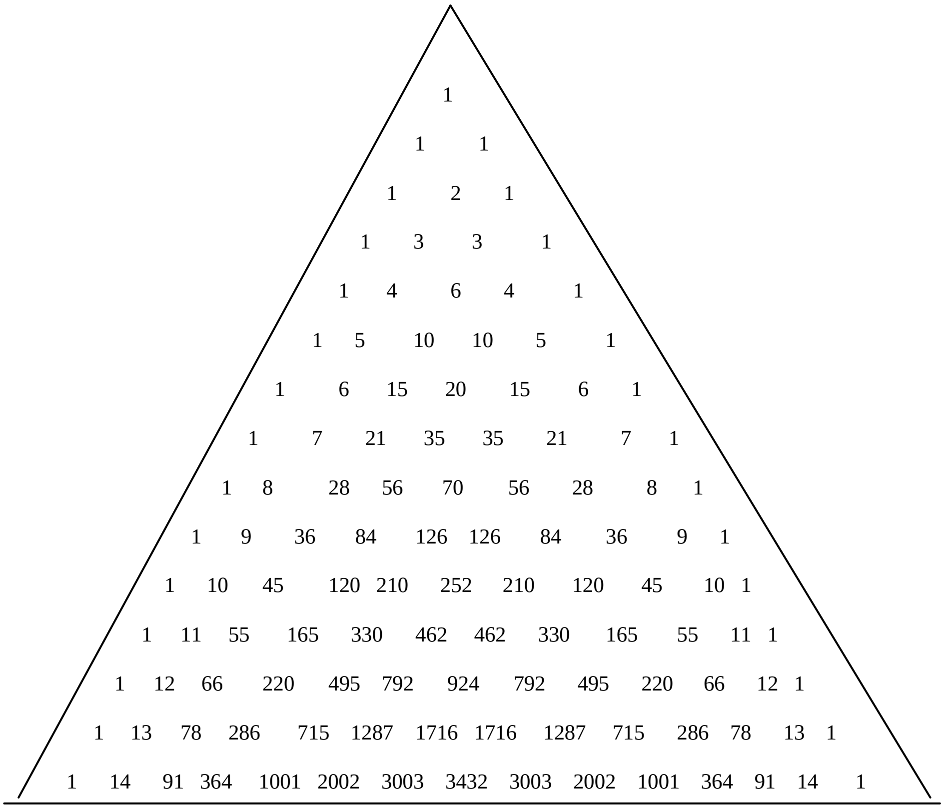
Το τρίγωνο είναι βασικό εργαλείο στην έρευνά μας όπως και σε πολλές σχετικές έρευνες (Κεΐσογλου Σ. Σπύρου Π. 2003, Βισκαδουράκης, Β., Σουγιούλ Αλ. 1998, Πατσιομίτου Σ., Κυνηγός Χ, 2005 κ.α.) Από την αρχική έρευνα ακόμη δόθηκε ιδιαίτερο βάρος στη διερεύνηση των απόψεων των μαθητών για το τι ακριβώς είναι τρίγωνο.

Διαπιστώθηκε ότι με την έννοια τρίγωνο οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται άμεσα ισόπλευρο τρίγωνο (Driver R. et al 1985, 1998). Σύγχυση ακόμη εμφανίστηκε στην αντίληψη των μαθητών για το αν το τρίγωνο είναι μόνο οι πλευρές ή και το εσωτερικό του. Οι περισσότερες περιγραφές (όπως *το τρίγωνο για τα κάλαντα* κ.λπ.) αντιστοιχούν στην πρώτη αντίληψη, λιγότερες (όπως *η θάλασσα του τρίγωνου των Βερμούδων*) στην δεύτερη. Ο δυισμός αυτός είναι συνδεδεμένος με την ιστορική εξέλιξη της γεωμετρικής έννοιας (Χατζηκυριάκου, Κ. 2004).

Για τον παραπάνω λόγο στην αρχή της δραστηριότητας Β και για να αποφύγουμε παρανοήσεις, ζητούμε από μαθητές να καταγράψουν τα εναπομείναντα «με εσωτερικό» τρίγωνα κατά τον σχεδιασμό των πρώτων επαναλήψεων της γεννήτριας Sierpinski.

1.7 Κωδικός Ζ: Τρίγωνο Pascal

Οι μαθητές στην Γ΄ τάξη γυμνασίου διδάσκονται το τρίγωνο του Pascal:



Εικόνα 1:Τρίγωνο του Pascal

Το τρίγωνο είναι πλούσιο σε μαθηματικό περιεχόμενο και μπορεί να συνδεθεί και με το τρίγωνο Sierpinski (Peitgen H.O., 1992a). Στις πρώτες παρεμβάσεις μας και στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας Β ζητούσαμε από τους μαθητές να εντοπίσουν και να σχεδιάσουν στο εσωτερικό του τριγώνου του Pascal μια παρόμοια δομή με το τρίγωνο Sierpinski, προκειμένου να επιτευχθεί σύνδεση με τις γνώσεις τους των μαθηματικών της Γ΄ γυμνασίου. Ο σωστός σχεδιασμός που ζητούσαμε πραγματοποιήθηκε μόνο από 14 στις 30 ομάδες συνολικά που πραγματοποίησαν τη δραστηριότητα, (κεφάλαιο ΙΧ).

1.8 Κωδικός Θ: Γεννήτρια (Initiator).

Η έννοια της γεννήτριας ενός κλασματοειδούς (fractal) σχήματος εμφανίζεται στις δραστηριότητες Β, Γ, Ε, όπου ζητούμε από τους μαθητές τον σχεδιασμό των επόμενων επαναλήψεων των σχημάτων Sierpinski, von Koch, Cantor αντίστοιχα. Παρόμοιες δραστηριότητες υπάρχουν πολλές στη βιβλιογραφία. Η έννοια της γεννήτριας είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της αυτοομοιότητας, όπως εμφανίζεται και στις διαπιστώσεις των μαθητών στις δραστηριότητες Β και Γ, ενδεικτικά:

Γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό.

Οι καταγραφές των μαθητών που αφορούσαν διαπίστωση γεννήτριας αυξήθηκαν σημαντικά μετά την παρακολούθηση εικόνων και προσομοιώσεων υπολογιστή στη δραστηριότητα Γ (από 6 ομάδες πριν την εκτέλεση της δραστηριότητας Γ, σε 40 ομάδες μετά).

Στη δραστηριότητα Β από τις 137 ομάδες σε 15 γυμνάσια, οι 134 σχεδίασαν σωστά τις δυο επόμενες επαναλήψεις (ή και περισσότερες) του Sierpinski που ζητήθηκαν. Στη δραστηριότητες Ε των ετών 2008 και 2009, οι 51 στις 65 και οι 65 στις 65 ομάδες αντίστοιχα σχεδίασαν σωστά τις γεννήτριες von Koch και Cantor. Ο σχεδιασμός της γεννήτριας von Koch δυσκόλεψε συγκριτικά περισσότερο τους μαθητές, ωστόσο οι μαθητές όλων των γυμνασίων ανταποκρίθηκαν πολύ ικανοποιητικά στο σημείο αυτό και ενθουσιάστηκαν με την έννοια της γεννήτριας.

1.9 Κωδικός Η. Εικόνα του κλασματοειδούς σχήματος που καθοδήγησε τους μαθητές στις καταγραφές τους.

Στη δραστηριότητα Γ ζητούμε από τους μαθητές να καταγράψουν την εικόνα του κλασματοειδούς που τους καθοδήγησε να εντοπίσουν τα βασικά χαρακτηριστικά που κατέγραψαν. Η επιλογή της εικόνας μας ενδιαφέρει σε σχέση με τα χαρακτηριστικά που εντοπίζουν οι μαθητές, σε σχέση με τη διαδικασία της γεννήτριας αλλά και σε σχέση με τις καταγραφές τους εφαρμογών της αυτών των σχημάτων στη φύση. Η εικόνα που επιλέχθηκε σχεδόν από όλα τα γυμνάσια είναι η εικόνα του Brocolli Romanesco:

Εικόνα 2: Brocolli Romanesco

Υπήρχαν και επιλογές άλλων εικόνων ή προσομοιώσεων που μειοψήφησαν και που πλησιάζουν ίσως περισσότερο την έννοια της γεννήτριας. Η επιλογή του Brocolli Romanesco όμως συνδέθηκε από τους μαθητές με πολλές παρόμοιες περιγραφές για κλασματοειδή σχήματα στη φύση.

1. 10 Κωδικός Ι: Διάσταση

Ο κωδικός Ι αναφέρεται στις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της διάστασης και χρησιμοποιείται στις δραστηριότητες Δ και Ε. Η διάσταση είναι πολύ σημαντική για τη διερεύνηση μας και ο κωδικός Ι θα περιγραφεί πιο αναλυτικά. Οι μαθητές της Γ΄ γυμνασίου έχουν διδαχθεί τις ευκλείδειες γεωμετρικές διαστάσεις ως εξής (στο Μπακόπουλος Γ, 2000):

Σημεία: Δεν κατέχουν όγκο μέσα στον χώρο και δεν έχουν ούτε μήκος ούτε εμβαδόν. Άρα, τα σημεία έχουν διάσταση μηδέν. (Ευκλείδης: “Σημείον εστί ό ού μέρος ουδέν” δηλαδή σημείο είναι κάτι πού δεν έχει μέρη, δεν διαμερίζεται).

Γραμμές: Μια γραμμή δεν έχει ούτε εμβαδόν ούτε όγκο. Έχει μόνο σημεία και ορίζεται από την κίνηση ενός σημείου. Οι γραμμές έχουν μόνο μία διάσταση. Ο Ευκλείδης είπε: "Γραμμή εστί μήκος άνευ πλάτους". Μία γραμμή είναι ένα μονοδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο.

Επιφάνειες: Αν κινήσουμε μια γραμμή θα κατασκευάσουμε μια επιφάνεια. Οι επιφάνειες δεν έχουν όγκο. Είναι δισδιάστατες.

Σχήματα στο χώρο: Αν κινήσουμε μια επιφάνεια θα δημιουργήσουμε ένα κομμάτι χώρου, που έχει όγκο. Άρα, ο χώρος είναι τρισδιάστατος. Για τους μαθητές απλά, ξεκάθαρα και αναμφισβήτητα η διάσταση ενός γεωμετρικού αντικειμένου μπορεί να είναι μόνο ένας από τους ακεραίους 0,1,2 ή 3, αυτό που ορίσαμε δηλαδή από την αρχή και το αποκαλέσαμε «Γεωμετρική» η «Τοπολογική Διάσταση» (Μπακόπουλος Γ., 2000). Είναι δύσκολο για τους μαθητές να αποδεχτούν ότι μπορεί να υπάρχει διαφορετική διάσταση με διαφορετική τιμή (Μπακόπουλος Γ., 2000, Δρακόπουλος Β., Δάλλα Λ., 1997).

Η προσέγγιση της διάστασης κλασματοειδών σχημάτων (fractal) στη διδασκαλία προτάθηκε πρώτη φορά από τον Mandelbrot το 1967 στο έργο του *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*. Από τότε ακολούθησαν πολλές σχετικές προτάσεις για τη διδασκαλία της (scale dimension, box dimension, self-similarity dimension). Η διάσταση αυτοομοιότητας για την προσέγγιση της fractal dimension, έχει διερευνηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία (Devaney R. L. 1990, Peitgen H.O 1992 a.b, Sandefur. J. T. 1996 κ.α.).

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της διάστασης αυτοομοιότητας από την θεωρία (κεφάλαιο ΙΙ 3.1.1, μη γραμμικότητα στη γεωμετρία) :

$$D = \frac{\log(N)}{\mathrm{Log}\,(L/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\,(1/\varepsilon)} \qquad (7)$$

(Devaney R.L. 1990, Peitgen H.O. et al 1992 a,b , Nonnenmacher T.F. 1996). N(ε) είναι ο αριθμός των μερών του αυτοόμοιου σχήματος που προκύπτουν με κάθε επανάληψη, η διάσταση αυτοομοιότητας D είναι το όριο του εκθέτη του λόγου αυτοομοιότητας για ε→0. Το ε→0 αποδίδει την όσο το δυνατόν μικρότερη κλίμακα μέτρησης. Η εξίσωση (7) εφαρμόζεται στην εργασία μας χωρίς αναφορά σε λογάριθμο ή όριο για ε→0, αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο. Το κλάσμα της εξίσωσης (7) αποδίδει τον γνωστό στους μαθητές της Γ΄ γυμνασίου λόγο ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων και η διάσταση D αντιστοιχεί στον εκθέτη του λόγου αυτού.

Στην περίπτωσή μας η διάσταση αυτοομοιότητας προσεγγίζεται στη δραστηριότητα Δ (κεφάλαιο Χ.4) χωρίς να δίνεται αρχικά οποιαδήποτε εξίσωση. Ξεκινάμε με τον γνωστό στους μαθητές πίνακα ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων (για ευθύγραμμο τμήμα, τετράγωνο, και κύβο) με διπλασιασμό της αρχικής πλευράς δηλαδή με διπλασιασμό της βάσης. Στη δεύτερη στήλη αναγράφεται από τους μαθητές ο αριθμός των ίδιων κομματιών που προκύπτουν μετά τον διπλασιασμό και στην τρίτη ο ίδιος αριθμός σε μορφή δύναμης:

ΣΧΗΜΑ	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ**	**Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΔΥΝΑΜΗΣ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΟΠΩΣ ΤΙΣ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**
Ευθεία		$2^{\square}$	1 (Μήκος)
Τετράγωνο		$2^{\square}$	2 (Μήκος και πλάτος)
Κύβος		$2^{\square}$	3 (Μήκος και πλάτος και ύψος)

Πίνακας 3.α

Κατόπιν ζητούμε τις διαπιστώσεις των μαθητών για τη σχέση του εκθέτη του λόγου ομοιότητας με τον αριθμό των γεωμετρικών διαστάσεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το σύνολο των μαθητών ταύτισε άμεσα και εύκολα τους δυο αυτούς αριθμούς.

Στη συνέχεια η εισαγωγή του τριγώνου Sierpinski στον πίνακα και η μη ακέραια διάσταση του εκθέτη δυσκόλεψε τους μαθητές:

ΣΧΗΜΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ	ΛΟΓΟΣ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ
Ευθ. τμήμα	2	$2 = (\frac{2}{1})^1$	1
Τρίγωνο Sierpinski	3	$3 = (\frac{2}{1})^\chi$	
Τετράγωνο	4	$4 = (\frac{2}{1})^2$	2
Κύβος	8	$8 = (\frac{2}{1})^3$	3

Πίνακας 3β: Ο πίνακας λόγου αυτοομοιότητας στα φύλλα εργασίας της δραστηριότητας

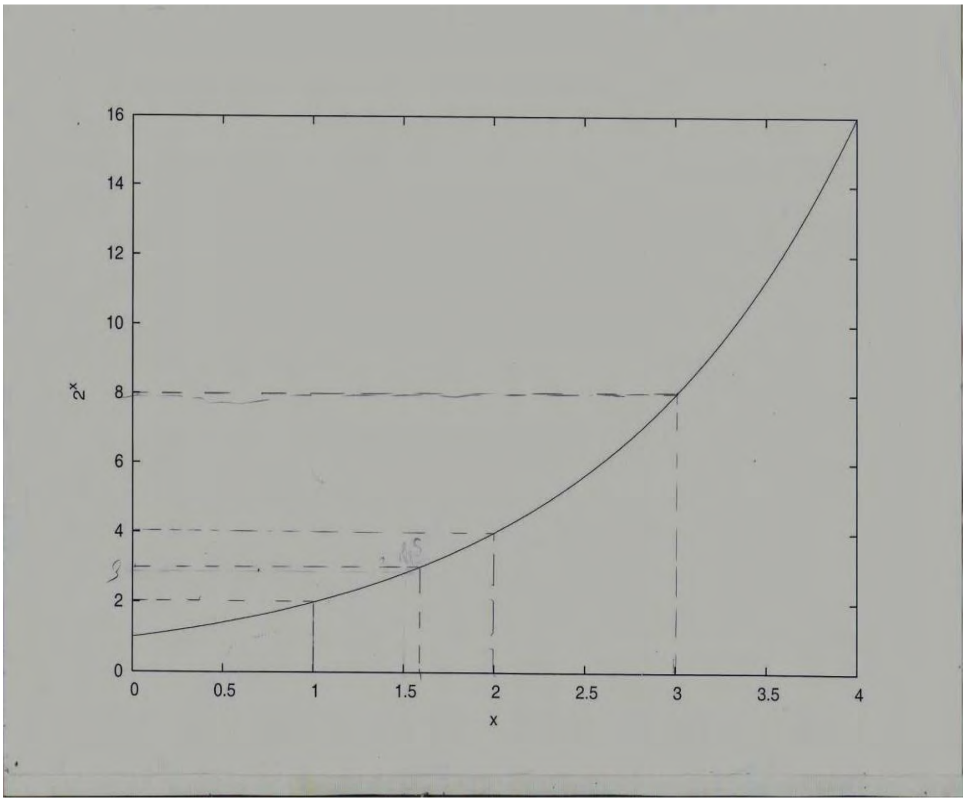
Το σκεπτικό παραμένει το ίδιο για το τρίγωνο Sierpinski όπως και για τα γνωστά σχήματα του πίνακα 3α δηλαδή ***με διπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά στο εσωτερικό 3 ίδια τρίγωνα.***

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης της δραστηριότητας Δ των φύλλων εργασίας έδειξαν όμως ότι σε συνολικό ποσοστό 64% οι μαθητές αρχικά αρνήθηκαν να δεχτούν μια δεκαδική διάσταση. Ενδεικτικά:

Δεν μπορούμε να βάλουμε αριθμό διαστάσεων επειδή ο αριθμός που βρήκαμε δεν είναι ακέραιος. Εκτός και αν γίνεται να μπει το 1,59…. άλλα δεν το έχουμε διδαχτεί ή *δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δεκαδικές διαστάσεις.*

Κατά τα τελευταία έτη της έρευνας 2007-09 εισήχθησαν επιμέρους δραστηριότητες στο β και γ μέρος της δραστηριότητας Δ της παρέμβασής μας, και στη συνέχεια έγινε αποδεκτή σε μεγάλο βαθμό (ποσοστό 72,5%) η ταύτιση του δεκαδικού (άρρητου) εκθέτη του πίνακα ομοιότητας με τη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski.

Στο β μέρος της δραστηριότητας Δ σημειώνονται από τους μαθητές οι εκθέτες του πίνακα 3 β σε γραφική παράσταση (συμπεριλαμβανομένου του σημείου της διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski). Με τον τόπο αυτό η επεξεργασία της γραφικής παράστασης από κάθε ομάδας εργασίας καθιστά οπτικά εμφανή τη συνέχεια και την άρρητη φύση της διάστασης αυτοομοιότητας στη νέα αυτή γεωμετρία.



Διάγραμμα 3: Δραστηριότητα Δ , β μέρος. Εύρεση εκθετών στην γραφική παράσταση από ομάδα εργασίας.

Στο γ μέρος επιδιώκεται η εύρεση με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια της διάστασης του τριγώνου Sierpinski. Αυτό προκύπτει από τον υπολογισμό του μέσου όρου πολλών προσπαθειών με τη χρήση υπολογιστή τσέπης ανά ομάδα εργασίας, με σκοπό την ακριβέστερη προσέγγιση του $3=2^{\chi}$

Ενδεικτικό παράδειγμα της προσέγγισης του $3=2^{\chi}$ από την παρέμβαση στο Πειραματικό Γυμνάσιο Μακεδονίας, Γ1, 2009 είναι το παρακάτω απόσπασμα από την απομαγνητοφώνηση ομάδας μαθητριών:

Μαθήτρια 1: *Το 1 πάει εδώ, τα άλλα*;

Μαθήτρια 2: *Μήπως πάει στο 3, 5, 7 στους μονούς αριθμούς;*

Μαθήτρια 1*: Όχι καλέ μετά είναι χ = 2 και χ = 3.*

Μαθήτρια 1: *Το βρήκα!!! Πάει στο 4 στο χ = 2, πάει στο 8 στο χ = 3 και στο 16 στο χ = 4;*

Μαθήτρια 2: *Ε καλά, ολέ*!

Μαθήτρια 1: *Φέρε το στυλό. Άρα στο 3 πάει το χ = 1,5;*

Μαθήτρια 1, Μαθήτρια 2: *Τελειώσαμε.*

Στο γ μέρος όλοι οι μαθητές εργάστηκαν με μεγάλο ενδιαφέρον και συναγωνίστηκαν μεταξύ τους για το ποια ομάδα θα έβρισκε ακριβέστερα την περίεργη δεκαδική διάσταση του τριγώνου Sierpinski. Το αποτέλεσμα όλων των ομάδων στο Πειραματικό Γυμνάσιο Μακεδονίας, Γ1, 2009 ήταν:

χ = 1,575 (Μαθήτρια 3, Μαθήτρια 4 και Μαθητής 1)

χ = 1,5 (Μαθήτρια 5, Μαθήτρια 6) (Μαθητής 2, Μαθητής 3)

χ = 1,60375 (Μαθήτρια 7, Μαθήτρια 8)

χ = 1,525 (Μαθητής 4, Μαθητής 5)

χ = 1,538 (Μαθήτρια 1, Μαθήτρια 2)

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (π.χ. Devaney R.L. 2003, Peitgen 1992a) η διάσταση του τριγώνου Sierpinski προσεγγίζεται στο: χ= 1,585. Η διάσταση αυτοομοιότητας που έγινε κοινά αποδεκτή από την τάξη (χ= 1,575) είχε απόκλιση 0,01 από τη συνήθη προσέγγιση.

Απόσπασμα από την απομαγνητοφώνηση μιας άλλης ομάδας σχετικά με τα δεκαδικά ψηφία της διάστασης:

Ερευνητής: Ποιο *αποτέλεσμα βρήκατε τελικά παιδιά*;

Μαθήτρια 1: *χ = 1,538.*

Ερευνητής: Θα *μπορούσατε να το βρείτε με μεγαλύτερη ακρίβεια;*

Μαθήτρια 2: *Ναι, αν γράφαμε όλα τα δεκαδικά ψηφία και κάναμε πολλές δοκιμές.*

Ερευνητής: *Μέχρι πόσα δεκαδικά ψηφία θα μπορούσατε να βρείτε στο χ αν είχαμε απεριόριστο χρόνο;*

Μαθήτρια 1: *Άπειρα.*

Ερευνητής*: Έχετε κάποια ιδέα, συγγνώμη, τι θα μπορούσε κατά τη γνώμη σας να σημαίνει αυτό;*

Μαθήτρια 2*: Νομίζω….. δεκαδική διάσταση;*

Μαθήτρια 1: *Μάλλον και τα άλλα φράκταλ σχήματα που είδαμε θα έχουν διάσταση με πολλά δεκαδικά ψηφία.*

Το παραπάνω ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί κατά τα έτη 2008 και 2009 τον κανόνα των καταγραφών των μαθητών. Σε συνολικά 98 ομάδες εργασίας των γυμνασίων των ετών αυτών (όπου εφαρμόστηκε το νέο μέρος β και γ της δραστηριότητας Δ), οι ομάδες που σύνδεσαν τον μη ακέραιο εκθέτη λόγου ομοιότητας με τη διάσταση Sierpinski αυξήθηκαν από 35 σε 71. Ενδεικτικές καταγραφές:

Δεν υπάρχουν μόνο ακέραιες διαστάσεις, η διάσταση 1,5 βρίσκεται ανάμεσα στη διάσταση μήκος και στη διάσταση μήκος και πλάτος.

Στη φύση υπάρχουν άπειρες διαστάσεις.

Μια λεπτή γραμμή έχει διάσταση 1 αλλά μπορεί να γίνει και πιο χοντρή και τότε 1 και κάτι, ανάμεσα από το ένα και το δύο.

Οι διαστάσεις μπορεί να είναι ακέραιες ή δεκαδικές, διότι εμπεριέχει την κίνηση και έχει άπειρες επαναλήψεις.

Υπάρχει κάποιο σχήμα που επαναλαμβάνετε πολλές φορές μέχρι να γεμίσει το χώρο, όπως είδαμε στον υπολογιστή. Στην γεωμετρία του Ευκλείδη δεν συμβαίνει αυτό.

1. 11 Κωδικός Κ: Άρρητοι αριθμοί

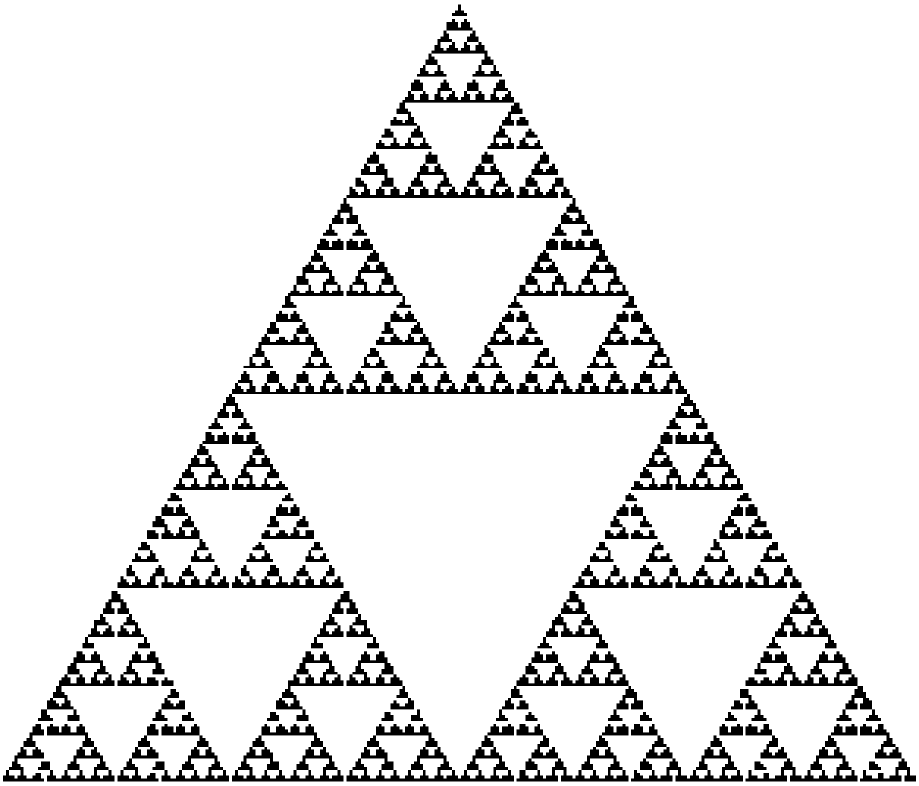
Οι άρρητοι αριθμοί εμφανίζονται στις δραστηριότητες Δ και Ε στον υπολογισμό της διάστασης αυτοομοιότητας των σχημάτων Sierpinski, von Koch και Cantor αντίστοιχα. Έρευνες στο εξωτερικό και στην Ελλάδα (Fischbein E, Jehiam R, Cohen D. 1995, Zazkis R, Sirotic N, 2004) ανέδειξαν τη δυσκολία μαθητών της 9ης και 10ης τάξης (Γ΄ γυμνασίου και Α΄ λυκείου αντίστοιχα) στην κατανόηση και χρήση των άρρητων αριθμών. Η συνήθης αντίληψη είναι ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρα και διαφορετικά δεκαδικά ψηφία και η συνήθης χρήση τους αφόρα τις τετραγωνικές ή άλλες ρίζες του 2 καθώς και συγκεκριμένα παραδείγματα (από τη γεωμετρία το **π** καθώς και η χρυσή τομή **φ**, και σε μεγαλύτερες τάξεις η βάση των νεπέρειων λογαρίθμων **e**). Σε έρευνα σε ελληνικό λύκειο διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να χειριστούν δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία, πολλοί θεωρούν ότι το π = 3,14 (Σπηλιοπούλου Χ, 2004).

Οι άρρητοι αριθμοί είναι γνωστοί στην Γ΄ τάξη γυμνασίου, αλλά η χρήση άρρητων αριθμών στον έκθετη μιας δύναμης (στον υπολογισμό της διάστασης αυτοομοιότητας αρχικά στη δραστηριότητα Δ και στη συνέχεια στην Ε), υπήρξε πρωτόγνωρη για τους μαθητές. Σε πολλές περιπτώσεις καταγράφηκαν λανθασμένα στον έκθετη του λόγου ομοιότητας ρίζα του 2 και 3. Κατά τα τελευταία έτη της έρευνάς μας όπου προσθέσαμε το δεύτερο μέρος και κυρίως το τρίτο μέρος της δραστηριότητας Δ, και ζητούσαμε από τους μαθητές να προσεγγίσουν τον έκθετη με τη βοήθεια γραφήματος (διάγραμμα 3) και υπολογιστών τσέπης, αυξήθηκαν κατακόρυφα οι καταγραφές άρρητου αριθμού στη διάσταση αυτοομοιότητας. Αυτό συνεχίστηκε τόσο στη δραστηριότητα Δ, περισσότερο ακόμη στην τελευταία δραστηριότητα Ε (διαδικασία υπολογισμού της διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής von Koch και Cantor). Η εύρεση του άρρητου αριθμού της διάστασης αυτοομοιότητας πραγματοποιήθηκε από όλες οι ομάδες και με μεγάλη ακρίβεια, σε όλα τα γυμνάσια κατά τις παρεμβάσεις στα έτη 2008 και 09 .

1.12 Κωδικός Λ: Κλασματοειδή Σχήματα

Τα κλασματοειδή σχήματα είναι άγνωστα στους μαθητές. Στα φύλλα εργασίας μας χρησιμοποιούνται το τρίγωνο Sierpinski, οι γραμμές von Koch και Cantor και το σφουγγάρι Menger.

α. Τρίγωνο Sierpinski



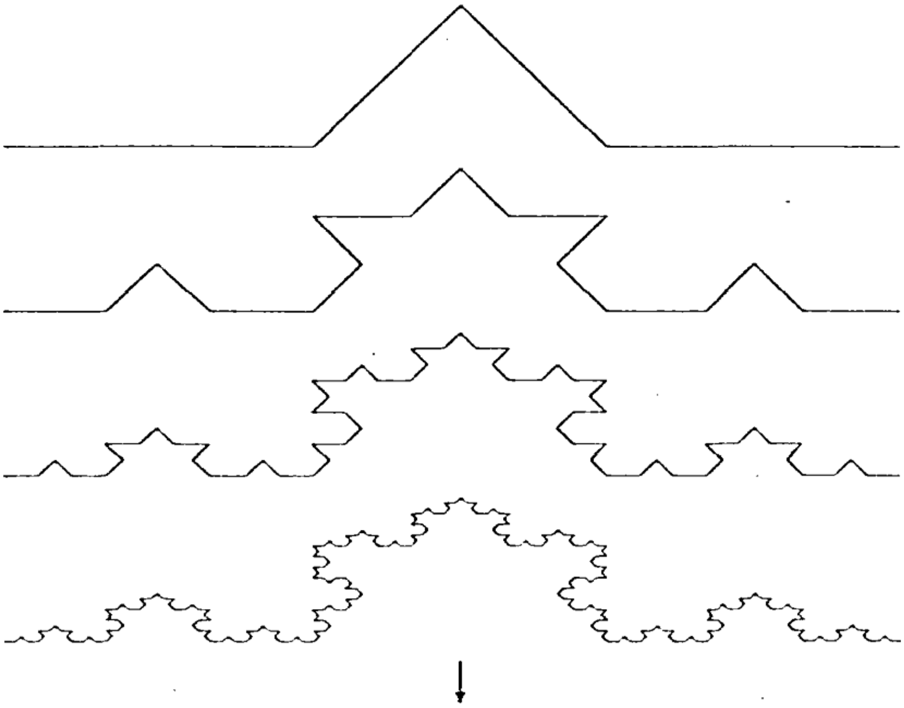
Εικόνα 4: Τρίγωνο Sierpinski

Το τρίγωνο Sierpinski (επινοήθηκε από τον W. Sierpinski το 1915), έχει χρησιμοποιηθεί σχεδόν σε κάθε διδακτική προσέγγιση των (Nemirovsky, R. 1993, Devaney, R.L. 2000, 2003 Adams, T.L. 2006., Karakuş, F. (2015). κ.α.), κύρια στη διδασκαλία της διάστασης αυτοομοιότητας. Παραθέτουμε εδώ την προσέγγιση μιας πρόσφατης παρόμοιας έρευνας στην Ελλάδα:

«Το σχήμα -σύνολο γνωστό με το όνομα Sierpinski gasket που προκύπτει δεν είναι μια επιφάνεια αφού δεν έχει εμβαδόν. Δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε μετακινώντας ένα σημείο, επομένως δεν είναι γραμμή και φυσικά δεν έχει όγκο. Το τελικό σχήμα αποτελείται από πλευρές τριγώνων που προέκυψαν από ένα συνδυασμό άπειρων τριγώνων μέσα σε τρίγωνα που κι αυτά είναι μέσα σε άλλα τρίγωνα. Ακριβώς αυτή η απειρία των τριγώνων και των πλευρών τους μας εμποδίζει να εφαρμόσουμε ότι γνωρίζουμε μέχρι τώρα περί διαστάσεων. Το σύνολό μας δεν μπορεί να έχει διάσταση δύο και δεν έχει διάσταση ένα, σαν να ήταν απλά μια μονοδιάστατη γραμμή. Επομένως πρέπει να υπάρχει μια άλλη μορφή διάστασης διαφορετικής από αυτή που έχει περιγράψει ο Ευκλείδης». (Πατσιομίτου Σ., Κυνηγός Χ, 2005).

Στη δραστηριότητα Δ της παρέμβασής μας ζητούμε από τους μαθητές τη διαπίστωση της αρρητότητας και τον υπολογισμό της διάστασης αυτοομοιότητας του Sierpinski. Η διάσταση του είναι d = 1.585...., η καλύτερη προσέγγιση στα φύλλα εργασίας μας ήταν ακριβώς χ = 1,585 (σε 5 γυμνάσια, πίνακας Γ8 κεφάλαιο X .4.4).

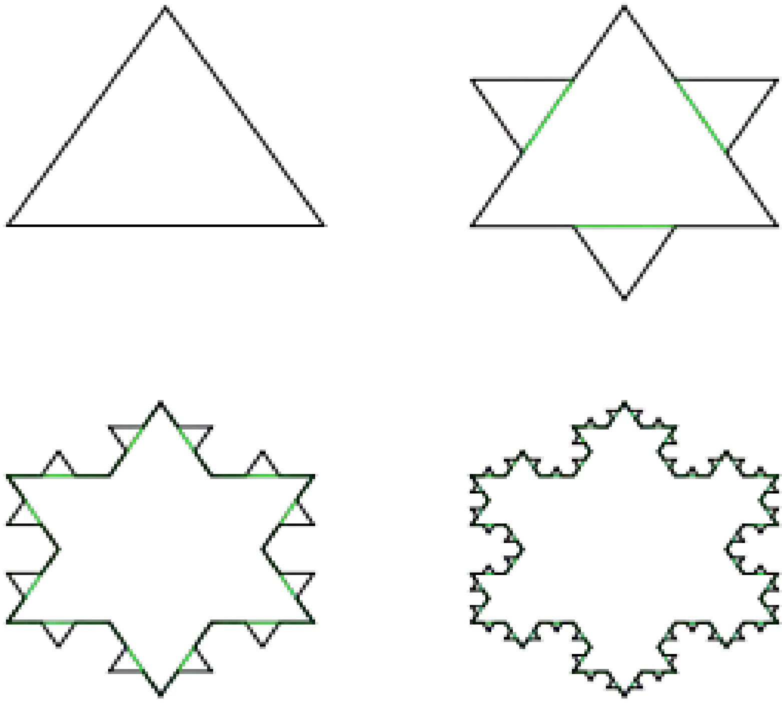
β. Γραμμή von Koch



Εικόνα 5: Γραμμή von Koch

Η γραμμή von Koch (επινοήθηκε από τον H. von Koch το 1904), παρουσιάζει οφθαλμοφανή ομοιότητα με σχήματα από τη φύση και έχει βρει πολλές εφαρμογές σε σχετικές έρευνες (B.B.Mandelbrot. 1983., Peitgen H.O., 1992 a,b, Couyet, J-F. 1996). Μετά το βιβλίο του Mandelbrot The Fractal Geometry of Nature, η γραμμή von Koch αναζητήθηκε σε πολλές δομές στη φύση που παρουσιάζουν στατιστική ομοιότητα με αυτήν (π.χ. στο Brocolli Romanesco). Στη διδασκαλία των κλασματοειδών σχημάτων έχει προταθεί η χρήση της γραμμής von Koch για την ανάδειξη ανεξαρτησίας από κλίμακα (Mandelbrot, B. B. 1967) καθώς και για την προσέγγιση της διάστασης (box dimension, Devaney, R. 1990).

Με τρεις γραμμές von Koch, μια από κάθε πλευρά του αρχικού ισόπλευρου τριγώνου σχηματίζεται η **χιονονιφάδα Von Koch**:

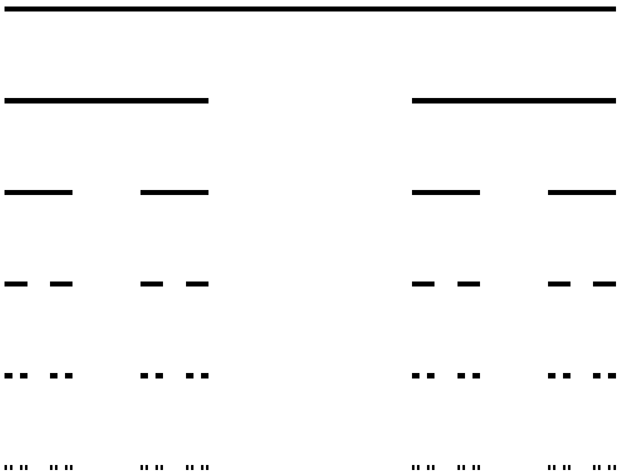


Εικόνα 6: Χιονονιφάδα von Koch

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της χιονονιφάδας von Koch είναι το πεπερασμένο εμβαδό και η μη πεπερασμένη περίμετρος της (Dane R. Camp. A 1991). Τα παραπάνω όμως δεν συμπεριλαμβάνονται στους στόχους της δραστηριότητας Ε της παρέμβασής μας, όπου μας ενδιαφέρει μόνον ο σχεδιασμός των επαναλήψεων και η εύρεση της διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής d =

1.2619... από τους μαθητές. Η καλύτερη προσέγγιση στα φύλλα εργασίας μας ήταν χ = 1,265 (σε 4 γυμνάσια).

γ. Γραμμή Cantor



Εικόνα 7: Γραμμή Cantor

Η γραμμή Cantor (επινοήθηκε από τον G. Cantor το 1883), παρουσιάζει την ιδιαιτερότητα ότι η διάσταση αυτοομοιότητας της είναι μικρότερη από ένα, ή πολύ απλά οι επαναλήψεις του διαχωρισμού της σε ευθύγραμμα τμήματα τείνουν σε ένα σύνολο σημείων (σκόνη του Cantor). Οι διαπιστώσεις των μαθητών στο σημείο αυτό διερευνώνται στα φύλλα εργασίας μας στη δραστηριότητα Ε, μαζί με το σχεδιασμό και τον υπολογισμό της διάστασης αυτοομοιότητας. Επιβεβαιώθηκε η αναφερόμενη στη βιβλιογραφία χρήση της έννοιας «άπειρο» (κωδικός Γ) στις διαπιστώσεις των μαθητών σχετικά με τις *ατελείωτες βουλίτσες, τελίτσες, σημεία ή σκόνη που θα προκύψουν*.

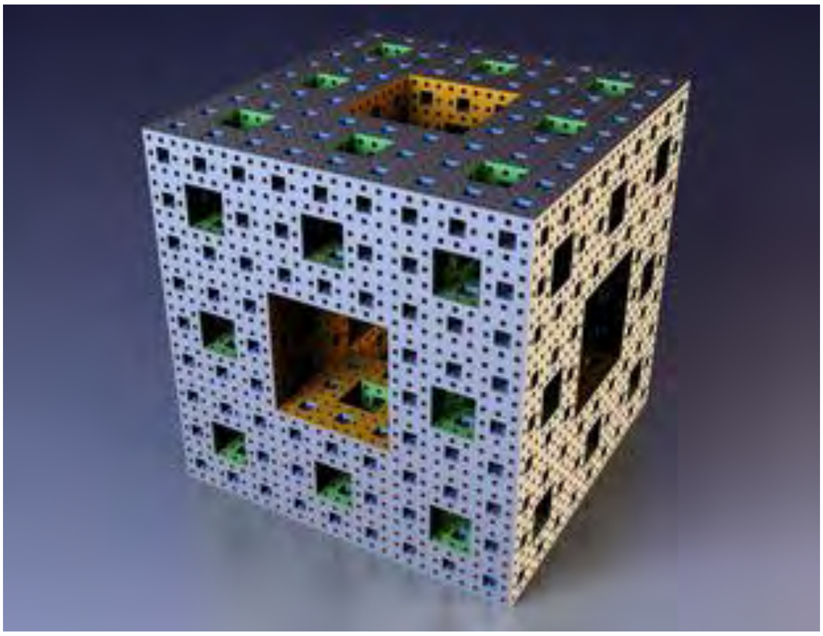
«Το σύνολο Cantor παρουσιάζει βαθύ μαθηματικό περιεχόμενο. Η fractal διάστασή του Cantor, είναι: D ~ 0.6309 (0 < 0.6309 < 1). Η τοπολογική διάσταση του συνόλου Cantor είναι μηδέν, γιατί αποτελείται από διακριτά σημεία. Για να είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο επομένως Fractal, πρέπει να είναι αυτοόμοιο και η διάσταση ομοιότητάς του να είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση». (Πατσιομίτου Σ., Χρόνης Κ, 2005).

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγει και μια παρόμοια προσέγγιση βασισμένη στο μέτρο του συνόλου Cantor. Η Διάσταση του συνόλου Cantor προσεγγίζεται στο d = 0.630929 (Μπακόπουλος Γ., 2000).

Η καλύτερη προσέγγιση στα δικά μας φύλλα εργασίας ήταν χ = 0,621 (σε τρία γυμνάσια).

δ. Σφουγγάρι Menger

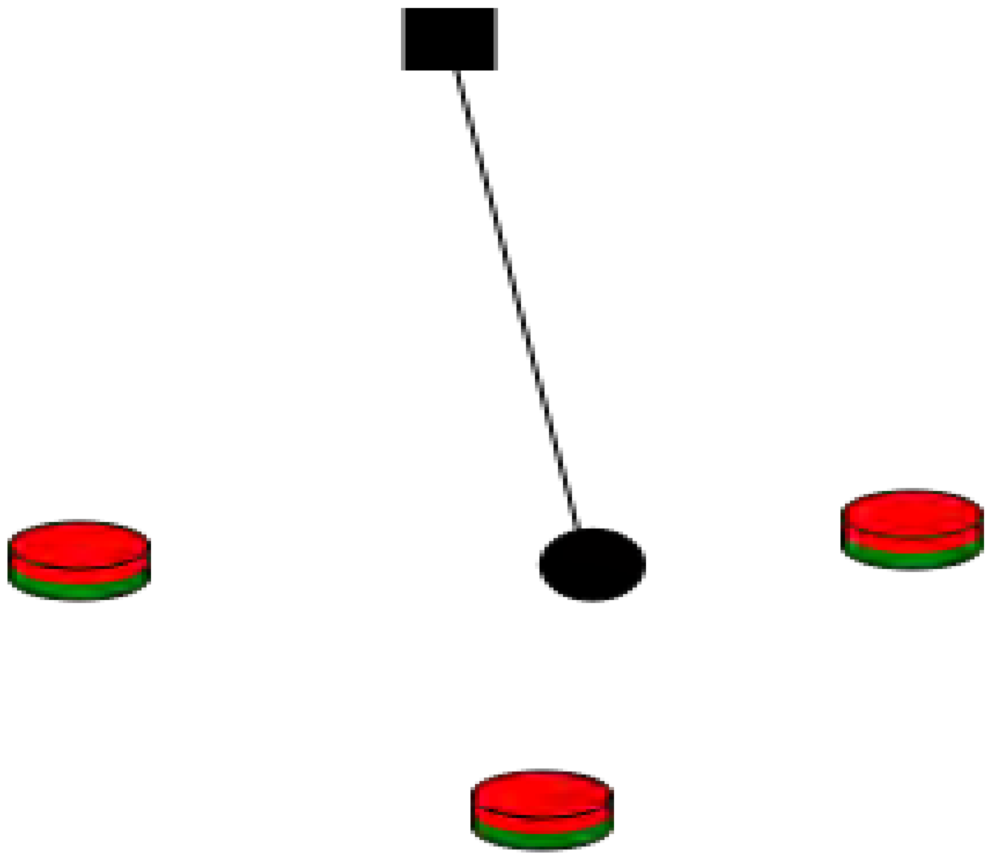
Το σφουγγάρι Menger (επινοήθηκε από τον K. Menger το 1926), χρησιμοποιείται στη δραστηριότητα ΣΤ μόνο στο τελικό τεστ ταξινόμησης των προηγούμενων σχημάτων (κεφάλαια IX 3.5.2, XI.2). Ζητούμε από τους μαθητές να τοποθετήσουν τα σχήματα σε σχέση με τη διάσταση αυτοομοιότητας τους σε πίνακα στο φύλλο εργασίας. Το σφουγγάρι Menger είναι άγνωστο στους μαθητές, αλλά προβάλλεται η εικόνα του στο διαφανειοσκόπιο.



Εικόνα 8: Σφουγγάρι Menger

Η σωστή ταξινόμηση της διάστασης αυτοομοιότητας του στη σχετική στήλη $2 < χ < 3$ του πίνακα πραγματοποιήθηκε από 51 στις 65 ομάδες εργασίας των γυμνασίων των ετών 2008, 2009. Η διάσταση αυτοομοιότητας του από τη θεωρία προσεγγίζεται στο d = 2.726833.

1.13 Κωδικός Μ: Μαγνητικό εκκρεμές



Εικόνα 9: Μαγνητικό εκκρεμές με 3 πόλους

Το μαγνητικό εκκρεμές (Skordoulis, C., Tolias, V., Stavrou, D. 2005) παρατέθηκε στα κεφάλαια II 4.4.2 και VI. 4. Αν και η διαδικασία συνέντευξης-πειράματος με το μαγνητικό εκκρεμές όπως εφαρμόστηκε στα πλαίσια της σπουδής περίπτωσης στο γυμνάσιο Ν. Μηχανιώνας (κεφάλαιο VI. 4 και παράρτημα Β), παρουσίαζε σημαντικό ερευνητικό ενδιαφέρον, δε συμπεριλήφθηκε τελικά στην παρέμβαση γιατί δεν αυτό δε θα ήταν εφικτό χρονικά και επιπλέον θα ξέφευγε από το πλαίσιο της εργασίας μας.

Κατά τη διάρκεια της έρευνας μας όμως και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις, προέκυψε ευκαιριακά σε τρία ακόμη γυμνάσια ($3^{ο}$, $5^{ο}$, $6^{ο}$, γυμνάσιο

Καλαμαριάς) δυνατότητα επιπλέον χρόνου για την έρευνά μας. Έχοντας την πειραματική διάταξη και τα φύλλα εργασίας έτοιμα από το γυμνάσιο Ν. Μηχανιώνας χρησιμοποιήθηκε η ευκαιρία για επαλήθευση ή όχι των συμπερασμάτων της διαθεματικής προσέγγισης της μελέτης περίπτωσης. Στις συνεντεύξεις-πειράματα στα 3^{o} , 5^{o} και 6^{o} γυμνάσια Καλαμαριάς συμμετείχαν τέσσερις μαθητές από το τμήμα της παρέμβασης εθελοντικά.

Το πείραμα εκτελέστηκε ξανά σε τρεις κύκλους (απλό εκκρεμές, μαγνητικό εκκρεμές, μαγνητικό εκκρεμές με χρώματα). Εμφανίστηκε η ίδια ισχυρή εντύπωση και η ίδια γνωστική σύγκρουση για τη δυνατότητα πρόβλεψης της αιώρησης στο μαγνητικό εκκρεμές όπως στο γυμνάσιο Ν. Μηχανιώνας (κεφάλαιο VI. 4). Σε σχέση με την εμφάνιση εσωτερικής δομής με τη χρήση τριών διαφορετικών χρωμάτων οι ίδιες τεχνικές δυσκολίες όπως και στο γυμνάσιο Ν. Μηχανιώνας δεν επέτρεψαν (με την εξαίρεση ίσως του $5^{ου}$ Γυμνάσιου Καλαμαριάς) την καθαρή εμφάνιση εσωτερικής δομής. Τα αποτελέσματα κατηγοριοποιημένα ανά γυμνάσιο και κατά την κύρια αιτιολόγηση (από τη φυσική ή τα μαθηματικά) για την εμφάνιση της εσωτερικής δομής, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Αιτιολόγηση εσωτερικής δομής	Γυμνάσιο Ν. Μηχανιώνας	3^{o} Γυμνάσιο Καλαμαριάς	5^{o} Γυμνάσιο Καλαμαριάς	6^{o} Γυμνάσιο Καλαμαριάς
Από τη φυσική: Σταθερές παραμέτροι κατά την εξέλιξη.	50%	25%		25%
Από τη φυσική: Περιοχές ισορροπίας δυνάμεων.		50%	25%	25%
Από τα μαθηματικά: Γεωμετρική δομή, σύνδεση με το παιχνίδι του χάους	50%	25%	75%	50%
Άλλο				

Πίνακας 4. *Σύνδεση με το παιχνίδι του χάους της παρέμβασης*

Οι παραπάνω αιτιολογήσεις των μαθητών είναι γενικά σωστές στο θεωρητικό πλαίσιο της μη γραμμικότητας. Σε σχέση με αυτό που μας ενδιέφερε περισσότερο συνολικά το 50% των μαθητών αναζήτησε εσωτερική δομή και συνέδεσε το μαγνητικό εκκρεμές με το παιχνίδι του χάους στην παρέμβαση. Ενδεικτικές απαντήσεις και ένα απόσπασμα από την απομαγνητοφώνηση από τα γυμνάσια αυτά:

Οι μαγνήτες μας καθοδηγούν, «τραβάνε» προς τις κορυφές όπως είπε η Λία, με τον τρόπο που τις σημαδεύαμε με τον χάρακα στο μάθημα (Ελένη).

Σε πυξίδα και μαγνήτη, ξέρουμε ότι αλλάζει κατεύθυνση (προς τον μαγνήτη) όμως δεν ξέρουμε πόσες φορές θα γυρίσει ο δείκτης πριν καταλήξει. Το μαγνητικό φάσμα ίσως είναι όπως οι γραμμές του τριγώνου Sierpinski. (Γιάννης).

Αυτό έγινε γιατί οι μαγνήτες σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο και έχουν όλοι την ίδια ισχύ, (Γεωργία Χριστίνα) ή μαγνητική δύναμη (Κατερίνα) και είναι τοποθετημένοι σε ισόπλευρο τρίγωνο, ή σε ίσες αποστάσεις.

Απόσπασμα από την απομαγνητοφώνηση 6^{ο} Γυμνάσιο Καλαμαριάς, όπου φαίνεται η σύνδεση με το παιχνίδι του χάους από τους μαθητές:

Νένα: Είναι σαν το εσωτερικό τρίγωνο στο παιγνίδι του χάους.

Γιάννης: Το μαγνητικό φάσμα ίσως είναι όπως οι γραμμές του τριγώνου Sierpinski.

Ερευνητής: Δηλαδή;

Γιάννης: Υπάρχουν τρεις ίδιοι πόλοι στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου που έλκουν το εκκρεμές ανάλογα με τις γραμμές του φάσματος.

Ερευνητής: Γνωρίζεται κάποιο άλλο παράδειγμα εσωτερικής τάξης σε ένα χαοτικό σύστημα.

Γιάννης: Ο καιρός. Στο μάτι του τυφώνα επικρατεί ηρεμία ενώ στο εξωτερικό χάος.

Τα αποτελέσματα είναι ίσως ενθαρρυντικά για μια βαθύτερη διερεύνηση της διαθεματικής προσέγγισης της μη γραμμικότητας στο σημείο αυτό, δεν εντάσσονται όμως στο πλαίσιο του ερευνητικού στόχου μας για αυτό και ο κωδικός Μ δεν συμπεριλαμβάνεται στην τελική διδακτική μας πρόταση.

ΚΕΦ. VIII
Θεμελιωμένη Θεωρία.
Δεύτερο μέρος:
Ποσοτική επεξεργασία

2ο στάδιο: Ανάλυση τύπου αξονικής κωδικοποίησης (axial coding)

Στην αξονική επεξεργασία της θεμελιωμένης θεωρίας, τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν αναπτύσσονται σε κατηγορίες και εξετάζεται η μεταξύ τους σχέση σε όλη τη διάρκεια της διερεύνησης (Jonson B, Christensen L, 2008). Η επεξεργασία είναι κυρίως ποσοτική, με έμφαση όμως και ποιοτική επεξεργασία στις κύριες αιτιολογήσεις.

Στην περίπτωσή μας τα δεδομένα της διερεύνησής μας είναι πάρα πολλά και η αξονική κωδικοποίηση γίνεται στατιστικά. Με βάση τους κωδικούς της ανοιχτής κωδικοποίησης της προηγούμενης ενότητας, αναλύονται στην ενότητα αυτή τα αποτελέσματα διδακτικών παρεμβάσεων σε 15 γυμνάσια κατά τα έτη 2006 έως και 2009 αξονικά. **Τα δεδομένα παρουσιάζονται σε πίνακες αποτελεσμάτων ανά δραστηριότητα**. (Συνολικά 126 πίνακες σε 10 διαφορετικά ήδη πινάκων στην ολοκληρωμένη μορφή των παρεμβάσεων). Οι πίνακες αυτοί αναφέρονται χρονολογικά στις παρεμβάσεις που πραγματοποιήθηκαν (σε ποιό συγκεκριμένο γυμνάσιο (αρίθμηση α-ξ) με πόσες ομάδες και ποιά σχολική χρονιά. Ακόμη αναφέρεται πού εφαρμόστηκαν νέες δραστηριότητες και για ποιό λόγο έγινε αυτό.

Από την αρχή προς το τέλος της ενότητας τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με τη σειρά που πραγματοποιήθηκαν οι δραστηριότητες (Α, Β, Γ, Δ, Ε) και για κάθε γυμνάσιο χωριστά (αρίθμηση πινάκων νέων δραστηριοτήτων από 1 έως 10 ανά γυμνάσιο) με τη χρονολογική τους σειρά παρεμβάσεων:

1. 7ο γυμνάσιο Βόλου (7 ομάδες), 2006. (7 πίνακες) 1 α, 2 α,3α,4α,5α, 6α,7α

2. Γυμνάσιο Περαίας (6 ομάδες), 2006. (6 πίνακες) 1 β, 2 β, 3β,4β,5β, 6β

3. 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 10), 2006. (7 πίνακες) 1 γ, 2 γ, 3γ,4γ,5γ, 6γ ,7γ

4. 7ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 7), 2007. (7 πίνακες) 1 δ, 2 δ, 3δ,4δ,5δ, 6δ, 7δ

5. 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 9), 2007. (7 πίνακες) 1 ε, 2 ε, 3ε,4ε,5ε, 6 ε,7ε

6. 3ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 13), 2007. (8 πίνακες) 1 στ, 2 στ. 3στ,4στ,5στ, 6στ 7στ 8 στ

7. 4ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 11), 2007. (6 πίνακες) 3ζ,4ζ,5ζ, 6ζ 7ζ 8ζ

8. Γυμνάσιο Επανομής (ομάδες 9), 2007. (8 πίνακες) 1 η, 2 η. 3η,4η,5η, 6, η, 7η 8η

9. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 12), 2008. (10 πίνακες) 1 θ, 2 θ. 3θ,4θ,5θ, 6θ, 7θ, 8θ,9θ,10θ.

10. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 9), 2008. (10 πίνακες) 1 ι, 2 ι, 3ι,4ι,5ι, 6ι , 7ι, 8ι,9ι,10ι.

11. 2ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 11), 2008. (10 πίνακες) 1 κ, 2 κ. 3κ,4κ,5κ, 6κ, 7κ ,8κ,9κ,10κ.

12. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009. (10 πίνακες) 1 λ, 2 λ. 3λ,4λ,5λ, 6λ ,7λ, 8λ,9λ,10λ.

13. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009. (10 πίνακες) 1 μ, 2 μ. 3μ,4μ,5μ, 6μ, 7μ, 8μ, 9λ,10λ.

14. 1ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 9), 2009. (10 πίνακες) 1 ν, 2 ν. 3ν,4ν,5ν, 6ν, 7ν, 8ν,9ν,10ν.

15. 5ο γυμνάσιο Βόλου (12 ομάδες), 2009. (10 πίνακες) 1 ξ, 2 ξ, 3ξ,4ξ,5ξ, 6ξ 7ξ 8ξ,9ξ,10ξ.

Πριν την πρώτη παρουσίαση κάθε σχετικού πίνακα, αναγράφονται οι κωδικοί της προηγούμενης ενότητας VII.1. (δηλαδή οι έννοιες που περιέχονται), και αναλύεται η σχέση τους με τους γνωστικούς στόχους κάθε δραστηριότητας χωριστά. Στην περίπτωση που στην πορεία της έρευνας προστίθενται νέοι κωδικοί ή γνωστικοί στόχοι σε κάποιο γυμνάσιο, αυτοί αναγράφονται παρομοίως πριν τον πρώτο πίνακα όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του γυμνασίου αυτού.

Για παράδειγμα στο πρώτο γυμνάσιο της χρονολογικής σειράς των παρεμβάσεών μας (7^{ο} γυμνάσιο Βόλου, 2006) που παρουσιάζεται στην ενότητα αυτή, αναγράφονται πρώτα οι γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας Α, και ακολουθούν 2 σχετικοί πίνακες όπου παρατίθενται τα αποτελέσματα ανά κωδικό (βλ. πίνακες 1α και 2α πιο κάτω). Στα επόμενα γυμνάσια, παρατίθενται μόνο τα αποτελέσματά στους αντίστοιχους πίνακες με σύντομο σχολιασμό, χωρίς να επαναλαμβάνεται ξανά η αρχική εξήγηση των γνωστικών στόχων.

Στη συνέχεια γίνεται το ίδιο για τις επόμενες δραστηριότητες Β, Γ, Δ. Στο πρώτο στη σειρά 7^{ο} γυμνάσιο Βόλου, αναγράφονται πάλι στους επόμενους πίνακες των δραστηριοτήτων αυτών οι εκάστοτε γνωστικοί στόχοι και οι κωδικοί. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα των επόμενων γυμνασίων παρατίθενται στους αντίστοιχους πίνακες ανά γυμνάσιο περιεκτικά.

Για τον λόγο αυτό η παράθεση των πινάκων και η κατηγοριοποίηση των δεδομένων μας είναι εξαιρετικά πυκνή και περιεκτική, αναπόφευκτη όμως συνέπεια της στατιστικής ανάλυσης στην ενότητα αυτή.

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να αναφερθεί ότι στο πρώτο μέρος της έρευνάς μας, τα φύλλα εργασίας των ετών 2006 και 2007 αποσκοπούσαν περισσότερο σε συλλογή δεδομένων και δεν είχαν ακόμη τελειοποιηθεί στις λεπτομέρειες τους. Αν και οι στόχοι των δραστηριοτήτων παραμένουν σε γενικές γραμμές οι ίδιοι, τα φύλλα εργασίας μας κατά τα έτη 2008 και 2009 στο δεύτερο στάδιο της έρευνας μας έχουν βελτιωθεί σημαντικά όπως αναλύεται στη συνέχεια. Οι αλλαγές επεξηγούνται και αναγράφονται αναλυτικά στους νέους πίνακες όπου πρωτοεμφανίζονται οι νέοι κωδικοί και οι νέοι γνωστικοί στόχοι. (Για παράδειγμα η δραστηριότητα Ε εισήχθη στο Γ2 του πειραματικού γυμνάσιου παν. Μακεδονίας το 2008, οι νέοι κωδικοί παρουσιάζονται στην ενότητα 2.5 και αναγράφονται στον νεοεμφανιζόμενο πίνακα 10).

Με τον τρόπο αυτό, τα αποτελέσματα της παρέμβασή μας στην τελική ολοκληρωμένη της μορφή το 2008 και 2009 παρατίθενται περιεκτικά σε 10 διαφορετικούς πίνακες ανά γυμνάσιο.

Πρέπει να σημειωθεί ακόμη στο πρώτο μέρος της έρευνας τα έτη 2006 και 2007 σε κάποια γυμνάσια για τεχνικούς λόγους (π.χ. έλλειψη διαφανειοσκόπιου), ορισμένες δραστηριότητες δεν πραγματοποιήθηκαν. Στις τελικές παρεμβάσεις κατά τα έτη 2008 και 2009 αυτό δε συνέβη σε καμία περίπτωση και όλες οι δραστηριότητες πραγματοποιήθηκαν κανονικά από όλες τις ομάδες εργασίας.

Ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων ανά δραστηριότητα και ανά γυμνάσιο κατά χρονολογική σειρά παρεμβάσεων:

2.1 Δραστηριότητα Α. ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

1. 7ο γυμνάσιο Βόλου (7 ομάδες), 2006.

Οι γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας ήταν να διαπιστώσουν οι μαθητές μέσω του παιχνιδιού την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος, την εμφάνιση πολύπλοκης, μη προβλέψιμης εξέλιξης από απλούς αρχικούς κανόνες, καθώς και να διαπιστώσουν τη σχέση της εξέλιξης του συστήματος (σε ένα απρόβλεπτο επίπεδο) με το τρίγωνο της επόμενης δραστηριότητας.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους ζητούμε την καταγραφή και αιτιολόγηση πιθανής δυνατότητας πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού. Τα αποτελέσματα της δραστηριότητας παρατίθενται στον πίνακα 1 ως εξής:

Κάθετες στήλες:

Στην πρώτη στήλη του πίνακα 1 σημειώνονται οι καταγραφές του κωδικού Α (διαπίστωση δυνατότητας πρόβλεψης).

Στη δεύτερη στήλη οι καταγραφές του κωδικού Α1 (ενδεχόμενα διαπίστωσης δυνατότητας πρόβλεψης τριγώνου),

Στην τρίτη στήλη αναγράφεται η κύρια αιτιολόγηση των μαθητών για τις παραπάνω καταγραφές.

Στην τέταρτη στήλη σημειώνονται οι καταγραφές του κωδικού Β **(**διαπίστωση αδυναμίας πρόβλεψης).

Στην πέμπτη στήλη αναγράφεται η κύρια αιτιολόγηση των μαθητών για τις καταγραφές αδυναμίας πρόβλεψης.

Στην έκτη στήλη σημειώνονται τυχόν διαφορετικές καταγραφές.

Οριζόντιες γραμμές:

Στην πρώτη γραμμή αναγράφονται οι κωδικοί.

Στη δεύτερη γραμμή σημειώνεται ο αριθμός των ομάδων που αντιστοιχούν στις καταγραφές αυτές.

Στην τρίτη γραμμή αναγράφονται οι κύριες αιτιολογήσεις τους.

	Στήλη 1	Στήλη 2	Στήλη 3	Στήλη 4	Στήλη 5	Στήλη 6
Γρ.1	Δυνατότητα πρόβλεψης (κωδικός Α)	Πρόβλεψη τριγώνου (κωδικός Α1)	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης (κωδικός Β)	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
Γρ.2	4	3	3	2	1	1
Γρ.3	*Για κάποιο λόγο θα υπήρχε συγκεκριμένο σχήμα. Δηλαδή σχεδιάζοντας τόσα πολλά σημεία ίσως σχεδιαστεί*		*Ναι γιατί μέσα απ τα σημεία θα σχηματίζονται μικρότερα σχήματα,(Τρίγωνα).*	*Όχι γιατί τα σημεία είναι πολλά και μπερδεμένα*	*Όχι γιατί θα υπάρχουν πολλές μπερδεμένες κουκίδες, που δεν θα βγαίνει κάποιο συγκεκριμένο*	*Ναι πιστεύω ότι κάτι θα σχηματιστεί για τον απλό λόγο ότι άμα δεν γινόταν τίποτα δεν θα υπήρχε*

	ένα σχήμα				*σχήμα*	*λόγος για την εργασία αυτή*

Πίνακας 1α: Οι καταγραφές των μαθητών για τη δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους και οι κύριες αιτιολογήσεις τους

Στη συνέχεια και κατά την εκτέλεση του παιχνιδιού χαρακτηρίζουν οι μαθητές τις κουκίδες τους, ακολούθως οι διαφάνειες συγκεντρώνονται και προβάλλονται όλες μαζί, και διαπιστώνεται και αιτιολογείται από τους μαθητές η εμφάνιση του τριγώνου Sierpinski. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα 2:

Στη στήλη 1 αναγράφεται ο χαρακτηρισμός των κουκίδων της τάξης τους (στο παιχνίδι του χάους) και ενδεχομένη διαπίστωση δυνατότητας πρόβλεψης κατά την εκτέλεση του παιχνιδιού από τους μαθητές.

Στη στήλη 2 αναγράφεται ο αριθμός ομάδων που διαπίστωσαν την εμφάνιση του τριγώνου Sierpinski στο τέλος της δραστηριότητας

Στη στήλη 3 αναγράφεται η κύρια αιτιολόγηση σχετικά με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων και ο αριθμός των καταγραφών αυτών.

Στη στήλη 4 αναγράφεται η κύρια αιτιολόγηση, σχετικά με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης και ο αριθμός των καταγραφών αυτών.

Στη στήλη 5 αναγράφεται ενδεχόμενα άλλη αιτιολόγηση και ο αριθμός των καταγραφών αυτών.

Στη γραμμή 1 εμφανίζεται η σειρά των στηλών.

Στη γραμμή 2 παρατίθεται ο αριθμός των ομάδων με τις σχετικές καταγραφές σε κάθε στήλη.

Στη γραμμή 3 παρατίθενται αντίστοιχα οι κύριες αιτιολογήσεις τους και ο αριθμός των καταγραφών αυτών.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski (κωδικός Λα)	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	7	5	1	1
Σκόρπιες		*Σχηματίστηκε ένα τρίγωνο Sierpinski, Αυτό έγινε γιατί το αντεστραμμένο τρίγωνο αποτελείται από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου της δραστηριότητας Α, οπότε άμα φέρουμε τα μέσα των σημείων στο τρίγωνο ABC θα σχηματιστεί το τρίγωνο Sierpinski.*	*Τελικά σχηματίστηκε ένα τρίγωνο που ονομάζεται Sierpinski. Πιστεύω εγώ και η συμμαθήτριά μου πως έγινε αυτό γιατί θα υπάρχει (λογικά) μια συμμετρία ανάμεσα στα σημεία έτσι ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να τα κατευθύνει έτσι ώστε να σχηματίζονται και άλλα τριγωνάκια*	*Σχηματίστηκε το Sierpinski. Αν και δεν μπορώ να το δικαιολογήσω Πιστεύω ότι υπάρχει κάποια μαθηματική σχέση ανάμεσα στις βούλες και το τρίγωνο*

Πίνακας 2α. Οι καταγραφές των μαθητών για την εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και οι κύριες αιτιολογήσεις τους

Μεγάλος σχετικά ήταν ο αριθμός των ομάδων που αναφέρθηκε σε σταθερές παραμέτρους στο χαοτικό αυτό σύστημα (5/7 ομάδες).

2. Γυμνάσιο Περαίας (6 ομάδες), 2006.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού

Οι αναγραφές από αριστερά προς δεξιά στις στήλες 1,2,3,4,5,6 περιγράφονται πιο πάνω στον πρώτο πίνακα 1α (7ο γυμνάσιο Βόλου):

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
3	1	1	4		
Θα διαπιστώσουμε σχήματα με το ίδιο σχήμα		*Θα σχηματιστεί ένα συγκεκριμένο σχήμα, ένα τρίγωνο).*		*Όχι γιατί όλα γίνονται ανάλογα με το τι θα φέρει το ζάρι*	

Πίνακας 1β: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Η στήλη 1 πρώτη από αριστερά αφορά καταγραφές κατά την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους. Οι στήλες 2,3,4,5 αφορούν καταγραφές μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος του παιχνιδιού, όπως προαναφέρθηκε στην περιγραφή του πίνακα 2α (7ο γυμνάσιο Βόλου):.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	6	5	-	1
Όχι συγκεκριμένες		*Σχηματίστηκαν πολλά τρίγωνα. Δεν είναι τυχαία όπως τα κάναμε με το ζάρι να σχηματίζονται, παίζουν και οι αριθμοί ρόλο. Οι αριθμοί του ζαριού είναι περιορισμένοι και έτσι δεν είναι τυχαίο όλο αυτό*		*Σχηματίστηκε το Sierpinski γιατί τα σημεία ήταν σωστά χαραγμένα*

Πίνακας 2β. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Και εδώ έχουμε μεγάλο σχετικά αριθμό των ομάδων που αναφέρθηκε σε σταθερές παραμέτρους στο χαοτικό αυτό σύστημα (5/6 ομάδες).

3. 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 10), 2006.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού:

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
8	3	1	2	-	-
Θα μπορούσε να σχηματιστεί κάποιο σχήμα		*Ένα μαύρο τρίγωνο γιατί τα σκόρπια σημεία θα καλύπτουν το εσωτερικό του τριγώνου).*			

Πίνακας 1γ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	10	5	-	1
σκόρπια σημεία		*Γιατί σχηματίζοντας τα σημεία στο μέσο της πραγματικής τους απόστασης δημιουργούνται ολοένα και μικρότερα τρίγωνα.* *Δεν είναι τυχαίο γιατί το ζάρι έχει 6 νούμερα*		*Σχηματίστηκε το σχήμα Sierpinski. Γιατί ενώ τα μεγεθύναμε κάναμε και άλλα (σημεία) μέσα σε αυτά και αυτή είναι η μόνη εξήγηση για αυτό και λέγεται παιχνίδι του χάους.*

Πίνακας 2γ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Στη καταγραφή στη τελευταία στήλη η ομάδα αναζήτησε την απάντηση στην επαναληπτικότητα και αυτοομοιότητα της διαδικασίας.

4. 7ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 7), 2007.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
4	-	-	2	1	-
Τα σημεία απ το δεύτερο βήμα και μετά, θα είναι καθορισμένα και θα σχεδιάσουν ένα σχήμα				*Όχι γιατί ότι σχηματίζεται είναι καθαρά θέμα τύχης*	

Πίνακας 1δ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	7	4	2	-
τυχαίες		*Τα σχήμα της δραστηριότητας Α. Αυτό συμβαίνει γιατί εφόσον στο σχήμα Α τα τρίγωνα που σχηματίζονται μετά είναι τα μισά από τα αρχικά έτσι και τη δραστηριότητα Β όταν βάζουμε το δάχτυλο σε ένα σημείο, σημειώνουμε μετά το μέσο σαν σημείο της ευθείας προς το A, B, C*	*Σχηματίστηκαν οι κουκίδες πάνω στο περίγραμμα των τριγώνων επίσης υπάρχει κενός χώρος στα τρίγωνα. Σχηματίστηκε το τρίγωνο της δραστηριότητας Α. όπως είδαμε ο υπολογιστής μπορεί και μεγεθύνει συνεχώς το τρίγωνο και να σχηματίζει άπειρα άλλα τρίγωνα. Έτσι κάθε σημείο που σχεδιάζουμε στην ουσία αποτελεί μέρος του περιγράμματος κάποιου (αν μεγεθύνουμε) τριγώνου συνεχώς*	

Πίνακας 2δ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Στην 4η στήλη η ομάδα αναζήτησε την απάντηση στην επαναληπτικότητα και αυτοομοιότητα της διαδικασίας, καθώς και στην δημιουργία των σημείων μόνο στο περίγραμμα των επαναλαμβανόμενων τριγώνων.

5. 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 9), 2007.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
6	-	-	3	1	
Θα σχηματιστεί ένα σχήμα εφόσον υπάρχουν καθορισμένες κατευθύνσεις για				*Γιατί οι πιθανότητες είναι ελάχιστες*	*Θα σχηματιστεί ένα πολύγωνο σχήμα με την ένωση*

το που θα βάλουμε το σημείο από τον αριθμό που παίζουμε, διότι σε κάθε αριθμό αντιστοιχεί κι ένα γράμμα. Έτσι αν ρίξουμε το ζάρι 20 φορές σε κάθε μια από αυτές σίγουρα θα ενώναμε και τα τρία γράμματα ABC σε κάποιο σχήμα.					*πολλών σημείων*

Πίνακας 1ε: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Η καταγραφή στην πρώτη στήλη έγινε στην αρχή της παρέμβασης και πριν οποιαδήποτε δραστηριότητα. Είναι πολύ καλή προσπάθεια πρόβλεψης και αιτιολόγησης του αποτελέσματος. Παρόμοιες καταγραφές συναντάμε συνήθως μόνο μετά την εμφάνιση του αποτελέσματος στον πίνακα 2.

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	9	6	-	-
σκόρπιες	*Σχηματίστηκε το τρίγωνο της δραστηριότητας A. Γιατί ήταν καθορισμένο από την αρχή προς ποια πλευρά του τριγώνου θα πήγαινε κάθε νούμερο που παίχτηκε και πόση θα ήταν η απόσταση από τα σημεία A,B,C*	*Πιστεύουμε ότι τα πολλά τρίγωνα μικρά και μεγάλα που σχηματίστηκαν δημιουργήθηκαν διότι όλο το παιχνίδι έγινε μέσα σε ένα μεγάλο τρίγωνο. Δημιουργήσαμε σημεία σε αυτό το τρίγωνο τα οποία αφού τα ενώσαμε*		

		ήταν λογικό να σχηματιστούν αυτά τα τρίγωνα.		

Πίνακας 2ε. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Η καταγραφή στην 2η στήλη είναι από την ομάδα που αναζήτησε σταθερές παραμέτρους από την αρχή και πριν την εξέλιξη του παιχνιδιού. Γενικά στο γυμνάσιο αυτό είναι πολλές οι καταγραφές στις στήλες 2 και 3 (100% και 66% των ομάδων αντίστοιχα).

6. 3ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 13), 2007.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού:

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
5	3	1	6	4	1
		Τρίγωνα ή τρίγωνο άπειρες φορές		*Όχι, γιατί το ζάρι μπορεί να μας πάει σε οποιαδήποτε γωνία*	*Δεν ξέρω*

Πίνακας 1στ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	12	8	-	1
Σκόρπιες		*Γιατί τα σημεία αυτά είναι το μέσο μιας απόστασης προς τις κορυφές του τριγώνου*		*Το τρίγωνο του Pascal*

Πίνακας 2στ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

7. 4ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 11), 2007.

Η δραστηριότητα Α δεν πραγματοποιήθηκε λόγω έλλειψης διαφανειοσκόπιου.

8. Γυμνάσιο Επανομής (ομάδες 9), 2007.

Η δραστηριότητα Α δεν πραγματοποιήθηκε λόγω έλλειψης διαφανειοσκόπιου.

9. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 12), 2008.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους:

Δυνατότητα πρόβλεψης (Α)	Πρόβλεψη τριγώνου (Α1)	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης (Β)	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
5	4	1	4	1	3
Πιστεύουμε θα σχηματιστεί κάτι αλλά δεν ξέρουμε τι	*Πιστεύω θα σχηματιστούν πολλά όμοια τρίγωνα καθώς τα σημεία που θα προκύψουν προέρχονται από το τρίγωνο ABC με τους κανόνες*	*Θα είναι ένα τρίγωνο μέσα στο αρχικό λόγω των αναλογιών του τριγώνου*	*Είναι ζάρι και δεν ξέρεις τι θα βγει.* *Δε θα σχηματιστεί τίποτα γιατί είναι τυχαίες οι κουκίδες*	*Επειδή οι κουκίδες θα είναι σκόρπιες και θα έχουν δημιουργηθεί τυχαία*	

Πίνακας 1θ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	12	5	3	
Συγκεντρωμένες σε πολλές περιοχές	*Σύμφωνα με τις αναλογίες του αρχικού τριγώνου από όπου και αν ξεκινήσεις δημιουργούνται ίσα και όμοια στο εσωτερικό του*	*Σχηματίστηκε το τριγώνου* sierpinski *και αυτό έγινε γιατί κάθε πλευρά ήταν η μισή της προηγούμενης όπως κάναμε και εμείς στο παιχνίδι με το ζάρι.*	*Σχηματίστηκε το τριγώνου* Sierpinski *γιατί με ισόπλευρο εξωτερικό τριγώνου και παίρνοντας πάντα τη μισή απόσταση αποκλείεται να πέσει κουκίδα στο μέσο.* *Τα σημεία φαινόταν στο παιχνίδι ότι μαζεύονται στις πλευρές, στη μέση δεν υπάρχει τίποτε*	

Πίνακας 2θ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

10. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 9), 2008.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους.

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
5	4	2	4	*3*	
		Νομίζω ότι θα σχηματιστούν πολλά μικρότερα τρίγωνα μέσα στο πρώτο		*Γιατί όλα εξαρτώνται από το ζάρι.*	

Πίνακας 1ι: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	9	3	1	2
Σκόρπιες		*Σχηματίστηκε το τριγώνου sierpinski και αυτό έγινε γιατί η κάθε απόσταση ήταν η μισή της προηγούμενης και σχηματίστηκαν πολλά μικρότερα όμοια τρίγωνα*	*Γιατί όλες οι κουκίδες είχαν φορά προς τις κορυφές και απόσταση τη στιγμή που τα τρίγωνα είναι όμοια μπορούν να πολλαπλασιαστούν άπειρες φόρες*	*α. Σχηματίστηκε το τριγώνου Sierpinski σίγουρα αυτό το σχήμα δεν έγινε τυχαία* *β. Στο παιχνίδι του χάους κάτι που φαίνεται τυχαίο προφανώς δεν είναι. Ίσως υπάρχει κάτι και στις διαστάσεις του τριγώνου και στα νούμερα, αλλά και πάλι οι έννοιες μπερδεύονται. Γενικά σε ένα παιχνίδι του χάους τίποτα δεν είναι τυχαίο.*

Πίνακας 2ι. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Μια ομάδα γενίκευσε τα συμπεράσματα της πριν γίνει οποιαδήποτε αναφορά σε διαστάσεις.: *Στο παιχνίδι του χάους κάτι που φαίνεται τυχαίο προφανώς δεν είναι. Ίσως υπάρχει κάτι και στις διαστάσεις του τριγώνου και στα νούμερα, αλλά και πάλι οι έννοιες μπερδεύονται. Γενικά σε ένα παιχνίδι του χάους τίποτα δεν είναι τυχαίο.*

11. 2ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 11), 2008.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους.

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
5	3	2	4	1	2
Ναι θα βγει. Αν υπάρχει τελικά μοίρα ή θαύματα θα βγει κάτι. Ίσως είναι ειδικό τρίγωνο στα μαθηματικά. Αλλά δεν είμαι σίγουρος.	*Μετά από κάποιο σημείο πιστεύω τα σημεία θα επαναλαμβάνονται. Η ακόμα να δημιουργηθούν πολλά μικρότερα τρίγωνα*	*Γιατί πάντα παίρνομαι το μέσο από κάθε ευθύγραμμο τμήμα*	*Πιστεύω ότι δε θα βγει τίποτα συγκεκριμένο γιατί είναι θέμα τύχης*	*Παίζουμε με το ζάρι*	*Το αποτέλεσμα είναι ανάλογο τη αλληλουχίας των αριθμών.*

Πίνακας 1κ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Δυο ενδιαφέρουσες καταγραφές*: α. Ναι θα βγει. Αν υπάρχει τελικά μοίρα ή θαύματα θα βγει κάτι. Ίσως είναι ειδικό τρίγωνο στα μαθηματικά. Αλλά δεν είμαι σίγουρος. β. Μετά από κάποιο σημείο πιστεύω τα σημεία θα επαναλαμβάνονται. Η ακόμα θα δημιουργηθούν πολλά μικρότερα τρίγωνα,*

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	11	3	5	2
Σκόρπιες		*Σχηματίστηκε το τρίγωνου Sierpinski διότι κάθε φορά*	*α. Με τους 6 αριθμούς του ζαριού και παίρνοντας τη μισή*	*δ. Οι γωνίες φαίνεται να έλκουν τα σημεία, υπάρχουν*

		σημειώναμε το μέσο της απόστασης από τη γωνία	*απόσταση είναι συγκεκριμένο το αποτέλεσμα και οριοθετεί τα σημεία που έπεσε το μολυβί* *β. Σχηματίστηκε το τρίγωνου Sierpinski επειδή μπορεί τα σημεία να ήταν τυχαία αλλά περιορίζονταν στους 6 αριθμούς του ζαριού, υπάρχουν και γωνίες οι οποίες μαγνητίζουν τα σημεία.* *Γ. Δεν ήταν πραγματικά τυχαίο, υπάρχουν περιοχές που τραβάνε τα σημεία και έχουμε επαναλαμβανόμενα όμοια τρίγωνα*	*περιοχές γεμάτες σημεία και άλλες που είναι εντελώς άδειες*

Πίνακας 2κ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Σχεδόν όλες οι καταγραφές (9/11) αναφέρονται σε στοιχειά από τη θεωρία δυναμικών συστημάτων, ειδικότερα περιοχών-σημείων έλξης (7/11). Ενδεικτικά η καταγραφή: *Δεν ήταν πραγματικά τυχαίο, υπάρχουν περιοχές που τραβάνε τα σημεία και έχουμε επαναλαμβανόμενα όμοια τρίγωνα.*

12. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους.

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
2	2	2	3	3	1
				Γιατί είναι τυχαίες οι κουκίδες	*Μπορεί να σχηματιστεί κάτι, αλλά μπορεί και όχι. Υπάρχουν πολλές πιθανότητες*

Πίνακας 1λ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	6	3		3
Τυχαίες		*Μπορεί να οφείλετε στην απειροτητα των σχημάτων. Άπειρα σημεία στο παιχνίδι, άπειρες επαναλήψεις στο τρίγωνο.*		*Δεν έγινε τυχαία*

Πίνακας 2λ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Οι καταγραφές της δραστηριότητας Α διέφεραν από τα άλλα γυμνάσια στο ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν αποδέχτηκε εδώ δυνατότητα πρόβλεψης.

13. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους.

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
3	2	2	3	-	-
	Δεν ξέρω μάλλον τρίγωνο	*Δεν μπορώ*	*Τίποτε οι κουκίδες είναι σκόρπιες*		

Πίνακας 1μ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	6	1	1	4
σκόρπιες			*Τα τρίγωνα είναι άπειρα και τα σημεία πέφτουν σε πλευρές*	*Τυχαία βγήκε το τρίγωνο*

Πίνακας 2μ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

14. 1ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 9), 2009.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους.

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
3	2	2	4	-	2
Πιστεύουμε πως θα βγει ένα σχήμα που ίσως ερμηνεύεται από τη θεωρία του χάους	*Θα σχηματιστούν πολλά τρίγωνα χωρίς να πέφτει το ένα πάνω στο άλλο*	*Γιατί πάντα παίρνομαι το μέσο από κάθε ευθύγραμμο τμήμα*			*Οι κουκίδες θα εξαπλωθούν σε διάφορα σημεία του τρίγωνου κυρίως στις πλευρές του.*

Πίνακας 1ν: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Το γυμνάσιο αυτό ήταν το δεύτερο όπου μαθητές από την αρχή δεν αποδέχτηκαν τη δυνατότητα πρόβλεψης, χωρίς όμως να δώσουν επαρκείς αιτιολογήσεις για αυτό. Η ομάδα που κατέγραψε *πιστεύουμε πως θα βγει ένα σχήμα που ίσως ερμηνεύεται από τη θεωρία του χάους* είχε ακούσει για τη θεωρία του χάους και τη σύνδεσε με το παιχνίδι.

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης, χαρακτηρισμός κουκίδων	Διαπίστωση εμφάνισης τριγώνου Sierpinski	Κύρια αιτιολόγηση, με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	Κύρια αιτιολόγηση με αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	Άλλο
-	9	3	3	2
Σκόρπιες		*Σχηματίστηκε το τρίγωνου Sierpinski διότι κάθε φορά οι κουκίδες τοποθετούνται στο μισό της νοητής γραμμής.*	*α. Οι κουκίδες συγκεντρώνονται στα άκρα των πλευρών και καθόλου στο κέντρο* *β. Σχηματίστηκε το τρίγωνου Sierpinski. Οι γωνίες μαγνητίζουν τα*	*α. Κατά τη γνώμη μου έγινε γιατί οι κουκίδες σχηματίζουν όμοια τρίγωνα.*

			σημεία.	

Πίνακας 2ν. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Σε συνέχεια των προηγούμενων παρατηρήσεων στην αρχή της δραστηριότητας, μετά την εκτέλεση του παιχνιδιού σχεδόν όλες οι καταγραφές (8/9) αναφέρονται σε στοιχεία από τη μη γραμμικότητα.

15. 5ο γυμνάσιο Βόλου (12 ομάδες), 2009.

Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού του χάους

Δυνατότητα πρόβλεψης	Πρόβλεψη τριγώνου	Κύρια αιτιολόγηση	Αδυναμία πρόβλεψης	Κύρια αιτιολόγηση	Άλλο
8	5	4	1	-	3
Αν ρίξουμε πολλές φορές το ζάρι θα βρούμε το μέσο όλων των νοητών γραμμών *Β. Θα δημιουργηθούν ευθείες που οδηγούν σε γωνίες*	*Α. Επειδή τηρούμε το μέσο κάθε ευθείας θα σχηματιστεί τρίγωνο* *Β. Θα σχηματιστούν πολλά μικρά τρίγωνα*	*Α. Αφού το κάνουμε μέσα σε ένα τρίγωνο θα σχηματιστούν τρίγωνα* *Β. επειδή οι κατευθύνσεις είναι 3 ανεξάρτητα από το μήκος των αποστάσεων*			*Η τελευταία κουκίδα θα πέσει πάνω στην πρώτη* *Γιατί επαναλαμβάνουμε πολλές φορές το ίδιο* *Ανά 4 οι κουκίδες θα ταυτίζονται*

Πίνακας 1ξ: Δυνατότητα πρόβλεψης του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους

Όπως και στο προηγούμενο γυμνάσιο και εδώ έχουμε ασυνήθιστα μεγάλο αριθμό καταγραφών για τη δυνατότητα πρόβλεψης από την αρχή (11/12). Σε πολλές περιπτώσεις αυτό αιτιολογείται αναζητώντας σταθερές παραμέτρους/κανόνες του παιχνιδιού. Ειδικότερα 5 ομάδες προέβλεψαν την εμφάνιση τριγώνων κύρια λόγω των 3 κατευθύνσεων κίνησης μέσα στο εξωτερικό τρίγωνο.

Κατά την εκτέλεση στήλη 1. Μετά την παρουσίαση του αποτελέσματος στήλες 2,3,4,5.

Δυνατότητα πρόβλεψης,	Διαπίστωση εμφάνισης	Κύρια αιτιολόγηση, με	Κύρια αιτιολόγηση με	Άλλο

χαρακτηρισμός κουκίδων	τριγώνου Sierpinski	αναζήτηση σταθερών παραμέτρων	αναφορά σε σημεία, περιοχές συγκέντρωσης	
-	12	5	5	2
Συγκεντρωμένες σε πολλές περιοχές		*Α. Σχηματίστηκε το τρίγωνου Sierpinski επειδή η απόσταση μεταξύ των κουκίδων μίκραινε το ίδιο κάθε φορά* *Β. Επειδή κάθε φορά είχαμε το μισό της πλευράς όπως στο Sierpinski*	*α. Επειδή οι κουκίδες μαζευόταν σε 3 περιοχές και το κέντρο παρέμενε κενό* *β. επειδή αν και οι κουκίδες συγκεντρωνόταν σε διάσπαρτες περιοχές το κέντρο παρέμενε* *γ Γιατί οι κουκίδες ήταν συγκεντρωμένες στις κορυφές των τριγώνων*	*α. Γιατί όλα ήταν προγραμματισμένα* *β. Ίσως υπάρχει κάποιος αλγεβρικός τύπος στον οποίο στηρίζεται*

Πίνακας 2ξ. Εμφάνιση τριγώνου Sierpinski και αιτιολόγηση

Σε συνέχεια του προηγούμενου πίνακα και εδώ σχεδόν όλες οι καταγραφές (10/12) αναφέρονται σε στοιχεία από τη θεωρία δυναμικών συστημάτων ειδικότερα περιοχών-σημείων έλξης (5/12). Ακόμη, όπως έγινε και στο γυμνάσιο Π.Γ.Π.Μ. Γ2 (2008), οι περισσότερες ομάδες κατέγραψαν: *συγκεντρωμένες σε πολλές περιοχές* αντί για *σκόρπιες* στην εμφάνιση των κουκκίδων τους. Αυτό πρέπει να οφείλεται στο μεγάλο πλήθος ομάδων και στη σχολαστική εκτέλεση του παιχνιδιού, που έδωσε μια πρώιμη εικόνα του αποτελέσματος του παιχνιδιού στους μαθητές.

2.2 Δραστηριότητα Β. ΤΡΙΓΩΝΟ SIERPINSKI

1. 7ο γυμνάσιο Βόλου (7 ομάδες), 2006.

Στη δραστηριότητα Β επιδιώκουμε να διαπιστώσουν οι μαθητές την αυτοομοιότητα (κωδικός Ε) και την επαναληπτικότητα (κωδικός Δ) ως τα βασικά χαρακτηριστικά του τριγώνου Sierpinski. Ακόμη αναμένεται ο σχεδιασμός δυο επαναλήψεων της γεννήτριας Sierpinski, ένδειξη κατανόησης της διαδικασίας δημιουργίας fractal σχημάτων. Στους πίνακες 3 και 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα πριν και μετά την παρακολούθηση της ανάπτυξης του τριγώνου Sierpinski στον υπολογιστή αντίστοιχα. Αναλυτικά:

Στη στήλη 1 αναγράφεται ο αριθμός ομάδων με σωστή εκτέλεση των δυο επαναλήψεων.

Στη στήλη 2 σημειώνονται οι διαπιστώσεις των μαθητών που αναφέρονται σε επαναληπτικότητα.

Στη στήλη 3 σημειώνονται οι διαπιστώσεις των μαθητών που αναφέρονται σε αυτοομοιότητα.

Στη στήλη 4 σημειώνονται οι διαπιστώσεις των μαθητών που αναφέρονται τόσο σε επαναληπτικότητα όσο και σε αυτοομοιότητα.

Στη στήλη 5 σημειώνονται οι διαπιστώσεις των μαθητών που αναφέρονται σε γεννήτρια σχήματος.

Στη στήλη 6 σημειώνονται ενδεχόμενες άλλες καταγραφές.

Στη γραμμή 1 σημειώνεται ο κωδικός (το περιεχόμενο) της κάθε ως άνω στήλης.

Στη γραμμή 2 παρατίθεται ο αριθμός των ομάδων με τις σχετικές καταγραφές.

Στη γραμμή 3 παρατίθενται οι κύριες αιτιολογήσεις τους αντίστοιχα.

Αναλυτικά κατά τον σχεδιασμό των επαναλήψεων Sierpinski στο φύλλο εργασίας τα αποτελέσματα ήταν:

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων (κωδικός Λβ)	Διαπίστωση επαναληπτικότητας (κωδικός Δ)	Διαπίστωση αυτοομοιότητας (κωδικός Ε)	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια (κωδ. Θ)	Άλλο
5	5	3	2		
	Ότι σε κάθε επανάληψη τα μαυρισμένα τρίγωνα τριπλασιάζονται, αν έχουμε τα κατάλληλα μέσα άπειρες, ατελείωτο άπειρο	*Όσο κάνουμε επαναλήψεις δημιουργούνται όλο και περισσότερα ίδια τρίγωνα.*	*Η συγκεκριμένη διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές, το σχήμα αυτό επαναλαμβάνεται, διότι η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές.*		

Πίνακας 3α. Η σχεδίαση τριγώνου Sierpinskiαπό τους μαθητές και οι κύριες αιτιολογήσεις τους

Στη συνέχεια και μετά την παρατήρηση επαναλήψεων Sierpinski στον υπολογιστή τα αποτελέσματα ήταν:

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
5	4	2	-	1
Ότι έχουν σχηματιστεί πολλά ακόμα μικρότερα τριγωνάκια, τα σχήματα στον υπολογιστή δεν τελειώνουν ποτέ		*Άπειρες, στον υπολογιστή φαίνεται να βλέπουμε το ίδιο τρίγωνο πολλές φορές αλλά στην πραγματικότητα βλέπουμε άπειρες επαναλήψεις.*		*Ατελείωτο*

Πίνακας 4α. Οι διαπιστώσεις των μαθητών μετά την παρακολούθηση της προσομοίωσης Sierpinski

2. Γυμνάσιο Περαίας (6 ομάδες), 2006.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας:

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
5	4	2	-	-	
	Τα τρίγωνα πολλαπλασιάζονται, όσες φορές θέλουμε				

Πίνακας 3β. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή:

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
5	4	2	-	1
Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές		*Ότι ο υπολογιστής συνεχώς διαιρεί το τρίγωνο σε διάφορα νέα τρίγωνα και κενά, διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ*		

Πίνακας 4β. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

3. 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 10), 2006.

Σχεδιασμός επαναλήψεων Sierpinski στο φύλλο εργασίας:

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
10	8	1	1	-	1
	σχηματίζονται όλο και μικρότερα τρίγωνα που δεν τελειώνουν ποτέ. η διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί άπειρες φορές		*άπειρα το ένα μέσα στο άλλο.*		

Πίνακας 3γ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή:

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
8	5	5	1	-
Τα τριγωνάκια αυτά θα συνέχιζαν να δημιουργούνται μέχρι το τέλος του κόσμου	*Παρατηρώ ότι όσες επαναλήψεις (μεγεθύνσεις) και αν συμβούν βλέπω το ίδιο σχήμα*	*Το σχέδιο σχηματίζεται και μεγεθύνεται συνέχεια για άπειρο χρονικό διάστημα. βλέπουμε άπειρες επαναλήψεις.*	*Παρατηρούμε ότι στην οθόνη του υπολογιστή εμφανίζεται μια πηγή τριγώνων που δημιουργεί άπειρα τρίγωνα*	

Πίνακας 4γ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

Στο γυμνάσιο αυτό φαίνεται καθαρά ότι η διαπίστωση της αυτοομοιότητας κατά κανόνα συνοδεύεται από τη διαπίστωση της επαναληπτικότητας (ενότητα VII .1. κωδικοί Δ, Ε).

4. 7ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 7), 2007.

Σχεδιασμός επαναλήψεων Sierpinski στο φύλλο εργασίας.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
7	7	4	4	-	-
	Ότι η διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί άπειρες φορές	*Επαναλαμβάνεται το ίδιο τρίγωνο συνεχώς*			

Πίνακας 3δ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
7	5	5	-	-
Ο υπολογιστής κάνει ζουμ χιλιάδες φορές χωρίς σταματημό και η διαδικασία συνεχίζεται γιατί τα τρίγωνα είναι άπειρα	*Ο υπολογιστής εξακολουθεί να μεγεθύνει τα τριγωνάκια τα οποία δημιουργούν και άλλα τριγωνάκια και αυτό ξαναεπαναλαμβάνεται*	*Στον υπολογιστή βλέπουμε μια συνεχή κίνηση, που διαιρεί τα τρίγωνα σε όλο και μικρότερα τριγωνάκια*		

Πίνακας 4δ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στην αίθουσα προβολών του σχολείου αντίθετα από κάποια άλλα γυμνάσια που δεν είχαν ούτε διαφανειοσκόπιο. Ήταν όμως το μοναδικό γυμνάσιο από αυτά που πραγματοποιήθηκαν οι παρεμβάσεις που είχε αυτή τη δυνατότητα. Είναι εμφανή τα πολύ καλά ποσοτικά και ποιοτικά αποτελέσματα σε σχέση με άλλα γυμνάσια στο παιχνίδι του χάους.

5. 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 9), 2007.

Σχεδιασμός επαναλήψεων Sierpinski στο φύλλο εργασίας.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
9	7	4	4	-	-
	κάθε φορά που κόβουμε ένα τρίγωνο σχηματίζονται συνεχώς περισσότερα και μικρότερα τρίγωνα		*ότι στο παραπάνω τρίγωνα μπορώ να δημιουργήσω άπειρα ίδια τρίγωνα στο εσωτερικό του*		

Πίνακας 3ε. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή.

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
9	5	5	-	1
Η προσέγγιση αυτή του τριγώνου είναι εντυπωσιακή αν σκεφτεί κανείς πως μπορούμε να εκτελέσουμε αυτήν την διαδικασία άπειρες φορές		*Ότι ο υπολογιστής συνεχώς ζουμάρει σε μικρότερα τρίγωνα τα οποία συνεχώς σχηματίζονται και ανασχηματίζονται*		*Στον υπολογιστή βλέπουμε ένα ατελείωτο τριγωνικό χάος*

Πίνακας 4ε. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

6. 3ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 13), 2007.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας:

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
13	10	2	1	-	1
	Η διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί άπειρες φορές		*Στο εσωτερικό του τριγώνου δημιουργούνται συνεχώς μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα και η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί πολλές φορές ακόμα*		*Μέχρι να σκιαγραφεί όλο το τρίγωνο*

Πίνακας 3στ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή:

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
7	4	2	1	1
Ο υπολογιστής κάνει ζουμ χιλιάδες φορές χωρίς σταματημό και δείχνει ότι δεν τελειώνουν ποτέ τα άσπρα τρίγωνα		*Επαναλαμβάνεται συνέχεια η διαίρεση του τριγώνου*	*Το κάθε τρίγωνο χωρίζεται σε μικρότερα κομματάκια πολλές φορές. Και αυτά σχηματίζουν ακόμη πιο μικρά*	*Το τρίγωνο είναι μια πύλη στο άπειρο. Όσο προχωρούμε δεν τελειώνουν τα τρίγωνα. Θα ταξιδεύουμε για πάντα.*

Πίνακας 4στ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sieprinski

7. 4ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 11), 2007.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
11	8	2	1	-	1
	Η διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί άπειρες φορές		*Στο εσωτερικό του τριγώνου δημιουργούνται συνεχώς μικρότερα ίδια τρίγωνα*		*Μέχρι να μαυρίσει όλο το τρίγωνο*

Πίνακας 3ζ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
7	4	2	-	-
Συνεχείς μεγεθύνσεις, άπειρα τρίγωνα		*Ο υπολογιστής μεγεθύνει συνεχώς το τρίγωνο έτσι ώστε να εμφανίζονται στην οθόνη του υπολογιστή όλο και περισσότερα τρίγωνα τα οποία στη συνέχεια μεγεθύνονται όλο και περισσότερο και έτσι σχηματίζονται νέα τρίγωνα*		.

Πίνακας 4ζ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sieprinski

8. Γυμνάσιο Επανομής (ομάδες 9), 2007.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
9	8	1	-	-	
	Ότι *στο εσωτερικό του τριγώνου δημιουργούνται συνέχεια καινούρια τριγωνάκια, και ότι αυτό μπορεί να συνεχιστεί άπειρες φορές*	*Ότι όσο χωρίζουμε τα τρίγωνα βγαίνουν ίδια καινούρια*			

Πίνακας 3η. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο

		αυτοομοιότητας		
4	5	4	-	1
Στην οθόνη του υπολογιστή επαναλαμβάνεται αυτό που εμείς κάναμε στο χαρτί άπειρες φορές		*Επαναλαμβάνεται η ίδια εικόνα. Μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία.*		*Ο υπολογιστής έχει δυνατότητες που δεν έχουμε εμείς και έτσι μπορεί να κάνει όσες επαναλήψεις θέλει*

Πίνακας 4η. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

9. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 12), 2008.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
12	12	7	7	2	
	Άπειρες φορές (Γ)	*Δημιουργούνται πολλά τρίγωνα που είναι όμοια με το αρχικό*	*Τα τρίγωνα γίνονται όλο και περισσότερα και μικρότερα και είναι όλα όμοια*	*Δημιουργούμε όμοια τρίγωνα από το αρχικό*	

Πίνακας 3θ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Στο γυμνάσιο αυτό σημειώθηκαν οι εξής ιδιαιτερότητες στις καταγραφές των μαθητών:

1. Οι μαθητές διαπίστωσαν ότι οι κουκίδες κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού φαίνονται να συγκεντρώνονται σε κάποιες περιοχές αντί να είναι *σκόρπιες*. Μια ομάδα παρατήρησε από πολύ νωρίς ότι τα σημεία *μαζεύονται κοντά στα πλευρά του τριγώνου, στη μέση δεν υπάρχει τίποτε.* Πιθανόν αυτή η διαφοροποίηση να οφείλεται στον μεγάλο αριθμό ομάδων στο γυμνάσιο αυτό και στη σχολαστική εκτέλεση του παιχνιδιού, πράγμα που έδωσε μεγάλο αριθμό κουκίδων και άφησε να διαφανεί το αποτέλεσμα πριν την τελική προβολή.

2. Σε απόλυτο ποσοστό 100% οι ομάδες κατέγραψαν *άπειρες* (κωδικός Γ) στην ερώτηση για το πόσες φορές μπορεί να επαναληφτεί η διαδικασία. Αιτιολογήθηκε

από τον καθηγητή της τάξης ότι γινόταν συχνά χρήση της έννοιας στα μαθηματικά τους.

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή.

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
12	5	5	1	2
Επαναλαμβανόμενη απεικόνιση	Δημιουργούνται συνέχεια τρίγωνα όμοια με το αρχικό	Άπειρη επαναλαμβανόμενη κίνηση όμοιων τριγώνων	Επανάληψη του ίδιου μοτίβου άπειρες φορές	Η διαδικασία μου φαίνεται ατελείωτη και συναρπαστική

Πίνακας 4θ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

10. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 9), 2008.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας:

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
9	5	3	3		1
	Άπειρες φορές	*Τα μικρά τρίγωνα που δημιουργούνται είναι όμοια μεταξύ τους*	*Δημιουργούνται συνέχεια μικρότερα τρίγωνα που είναι όμοια*		*Μέχρι να γεμίσει το τρίγωνο*

Πίνακας 3ι. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
9	6	6	1	-
Ο υπολογιστής έχει τη δυνατότητα να επαναλάβει άπειρες φόρες τη διαδικασία		*Ο υπολογιστής επαναλαμβάνει άπειρες φόρες και τα τρίγωνα συνεχίζουν να είναι όμοια*		

Πίνακας 4ι. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

11. 2ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 11), 2008.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
11	11	8	9	-	-
	Άπειρες	*Πολλαπλασιάζονται τα ιδία τρίγωνα*	*α. Επαναλαμβάνονται όμοια τρίγωνα β. Ένα συμμετρικό επαναλαμβανόμενο μοτίβο με έντονο στοιχείο το αυξανόμενο μέγεθος των ίδιων τριγώνων*		

Πίνακας 3κ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή.

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
11	7	10	1	-
α. Επαναλαμβάνεται κάθε φορά η πρώτη διαδικασία β. Συνέχεια η ιδία διαδικασία όπως πριν	*Ο Η.Υ. μεγεθύνει τα τρίγωνα που δε φαίνονται*	*Τα τρίγωνα επαναλαμβάνονται απείρως Η διαδικασία δεν έχει τέλος, σχηματίζονται ιδία τρίγωνα*	*Το αρχικό σχήμα μπορεί να επαναληφτεί αλλά μόνο από τον Η.Υ. χωρίς τέλος*	

Πίνακας 4κ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

Στο γυμνάσιο αυτό έχουμε από την αρχή πάρα πολλές (9/11) καταγραφές αυτοομοιότητας.

12. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
6	5	3	3		1
	Άπειρες	*Η επιφάνεια του τριγώνου καλύπτεται και σχηματίζονται ομάδες όμοιων*	*α. Δημιουργούνται περισσότερα τρίγωνα που είναι ίσα μεταξύ τους β. Αυξάνεται ο αριθμός των*		*Μέχρι να γεμίσει το τρίγωνο*

		τριγώνων	*τριγώνων αλλά είναι τα ίδια*		

Πίνακας 3λ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
5	4	4	1	-
α. Διαδικασία συνεχόμενη ακατάπαυστη επ αόριστον συνεχίζεται β. Η διαδικασία είναι συνεχής και το αποτέλεσμα είναι να εμφανίζονται στην οθόνη άπειρα τρίγωνα.	*Αυτά που βγαίνουν είναι όμοια τρίγωνα κάθε φορά*	*Το ίδιο τρίγωνο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές σχηματίζοντας ατέλειωτα μεγάλο τρίγωνο το οποίο περιλαμβάνει ίδια μικρότερα τρίγωνα.*	*Απομόνωση τριγώνου και δημιουργία περισσότερων τριγώνων*	

Πίνακας 4λ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

13. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
6	5	3	3	1	1
	Άπειρες αλλά όχι με το χέρι		*Σχηματίζονται άπειρα όμοια τρίγωνα τα οποία σταδιακά συρρικνώνονται*	*Δημιουργούνται συνεχώς νέα τρίγωνα μικρότερα από τα προηγούμενα που όμως αποτελούν σμίκρυνση του αρχικού.*	*Μέχρι να γεμίσει το τρίγωνο*

Πίνακας 3μ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
5	2	2	-	1
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται άπειρες φορές		*Επανάληψη όμοιων τριγώνων*		

Πίνακας 4μ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

14. 1ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 9), 2009.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
9	8	7	7	1	-
	Άπειρες	*Ότι θα σχηματίζονται συνέχεια άλλα τρίγωνα. Και θα τριπλασιάζονται. Είναι τα ίδια τρίγωνα κάθε φορά. Τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι όμοια.*	*Σχηματίζονται όλο και περισσότερα όμοια τρίγωνα*	*Κάθε τρίγωνου είναι όμοιο με το αρχικό.*	

Πίνακας 3ν. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή.

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
9	8	8	-	1
Η διαδικασία είναι κάθε φορά η ίδια όπως και το αποτέλεσμα. Δημιουργούνται συνέχεια όμοια τρίγωνα.	*Στην οθόνη του υπολογιστή φαίνεται πιο καθαρά το συμπέρασμα που βγάλαμε στις ερωτήσεις 2.α και 2.β*	*Δημιουργούνται συνεχεία όμοια τρίγωνα.*		*Με τον Η.Υ. είναι πιο κατανοητό, γρήγορο και αποτελεσματικό, άλλα είναι το ίδιο πράγμα που κάναμε και μείς*

Πίνακας 4ν. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

Στο γυμνάσιο αυτό έχουμε επίσης πάρα πολλές (8/9) καταγραφές αυτοομοιότητας από την αρχή. Ακόμη ενδιαφέρον έχουν τρεις συγκεκριμένες καταγραφές:

α. *Στην οθόνη του υπολογιστή φαίνεται πιο καθαρά το συμπέρασμα που βγάλαμε στις ερωτήσεις 2.α και 2.β.*

β. *Με τον Η.Υ. είναι πιο κατανοητό, γρήγορο και αποτελεσματικό, άλλα είναι το ίδιο πράγμα που κάναμε και μείς.*

γ. Η διαδικασία είναι κάθε φορά η ίδια όπως και το αποτέλεσμα. Δημιουργούνται συνέχεια όμοια τρίγωνα.

Οι παραπάνω καταγραφές ερμηνεύουν την οπτική των μαθητών για την παρατήρηση επαναλήψεων στον Η.Υ., επιβεβαιώνοντας κατά τη γνώμη μας την διδακτική αξία του έργου (σχεδιασμός Sierpinski) που πραγματοποίησαν οι ίδιοι.

15. 5ο γυμνάσιο Βόλου (12 ομάδες), 2009.

Σχεδιασμός Sierpinski στο φύλλο εργασίας.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων	Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
12	5	1	2	-	5
	Άπειρες Δημιουργούνται όλο και μικρότερα τρίγωνα	*Πολλαπλασιάζονται τα ιδία τρίγωνα*	*Δημιουργούνται όλο και μικρότερα λευκά όμοια τρίγωνα*		*α. Μέχρι να γεμίσει όλο το τρίγωνο β. Τα τρίγωνα κάποια στιγμή θα ενωθούν*

Πίνακας 3ξ. Σχεδίαση τριγώνου Sierpinski

Μετά την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή.

Διαπίστωση επαναληπτικότητας	Διαπίστωση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση επαναληπτικότητας και αυτοομοιότητας	Αναφορά σε γεννήτρια	Άλλο
12	1	2	-	-
α. Επαναλαμβάνεται η διαδικασία επ αόριστον β. Ατελείωτη η ιδία διαδικασία γ. Συνεχόμενα επαναλαμβανόμενη		*Ο Η.Υ. επαναλαμβάνει τα ιδία τρίγωνα που άπειρες φορές*		

Πίνακας 4ξ. Διαπιστώσεις μετά την προσομοίωση Sierpinski

Στο γυμνάσιο αυτό έχουμε πολλές σχετικά (5/12) καταγραφές που αναφέρονται στο γέμισμα του τριγώνου. Ενδεικτικά:

α. *Μέχρι να γεμίσει όλο το τρίγωνο*

β. Τα τρίγωνα κάποια στιγμή θα ενωθούν

2.3 Δραστηριότητα Γ. Κλασματοειδή σχήματα

1. 7ο γυμνάσιο Βόλου (7 ομάδες), 2006.

Με προβολή περισσότερων εικόνων, σχημάτων και προσομοιώσεων κλασματοειδών σχημάτων στον υπολογιστή αναμένεται από τους μαθητές η διαπίστωση των βασικών χαρακτηριστικών τους (επαναληπτικότητα και αυτοομοιότητα, με έμφαση όμως στην αυτοομοιότητα). Ακόμη αναμένεται η διαπίστωση ύπαρξης κάποιου αρχικού σχήματος (γεννήτριας) που δημιουργεί τις εικόνες ή τις προσομοιώσεις, και γενίκευση των διαπιστώσεων τους στην προσέγγιση της νέας γεωμετρίας στη φύση. Τέλος αναμένεται η διατύπωση της λέξης «*αυτοομοιότητα»* από τους μαθητές. Η διαπίστωση και χρήση της αυτοομοιότητας από τους μαθητές αποτελεί τον κύριο γνωστικό στόχο της δραστηριότητας.

Στον πίνακα 5 εμφανίζονται οι διαπιστώσεις των μαθητών για τα βασικά χαρακτηριστικά των εικόνων.

Στις στήλες 1-5 παρατίθενται οι παραπάνω κατηγορίες των πιθανών αναφορών των μαθητών.

Στη γραμμή 1 η αναγραφή σε επαναληπτικότητα, αυτοομοιότητα, γεννήτρια κ.α.

Στη γραμμή 2 παρατίθεται ο αριθμός των ομάδων με τις σχετικές καταγραφές.

Στη γραμμή 3 παρατίθενται οι κύριες αιτιολογήσεις τους αντίστοιχα.

Αναλυτικά οι καταγραφέςκατά τον σχεδιασμό των επαναλήψεων Sierpinski

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
7	4	4	5	
Αποτελούνται από συνεχείς επαναλήψεις δημιουργώντας ένα ομοιόμορφο σχήμα.	*Είναι σαν να συνεχίζονται τα σχήματα το ένα μέσα στο άλλο, με σκοπό, να μην τελειώσουν ποτέ.*		*Όλα ξεκινάνε από ένα αρχικό σχέδιο στο οποίο υπάρχει μια σταδιακή σμίκρυνση.*	

Πίνακας 5α. Κατηγοριοποίηση περιγραφών των μαθητών για τις εικόνες fractal της δραστηριότητας Γ στις κατηγορίες επαναληπτικότητα, αυτοομοιότητα, γεννήτρια κ.α.

Στον πιο κάτω πίνακα 6 περιλαμβάνονται οι καταγραφές που συμπληρώνουν τους γνωστικούς στόχους της δραστηριότητας, με την εξαίρεση της πρώτης στήλης (κωδικός Η), η οποία αποτελεί εργαλείο επιλογής των εικόνων- προσομοιώσεων της δραστηριότητας Γ για την τελική πρότασή μας.

Οι καταγραφές εδώ αποτελούν από κοινού διαπιστώσεις όλων των μαθητών της τάξης, μετά από συζήτηση μεταξύ τους. Ειδικά η πρόταση ονομασίας από όλη την τάξη, αναμένεται να αναδείξει την επαναληπτικότητα και κύρια την αυτοομοιότητα από όλη την τάξη, ένδειξη επιτυχίας των γνωστικών στόχων της δραστηριότητας. Ο ορισμός της αυτοομοιότητας δε δίνεται από τον καθηγητή ή τον ερευνητή, αναμένεται η διατύπωση και εξήγηση της λέξης «αυτοομοιότητα» από τους μαθητές αποκλειστικά κατά την παραπάνω διαδικασία.

Ειδικότερα στον πίνακα 6 σημειώνονται τα εξής:

Στήλη 1: Η εικόνα που καθοδήγησε τις περισσότερες ομάδες.

Στήλη 2: Οι κύριες διαπιστώσεις των μαθητών

Στήλη 3: Τα βασικά χαρακτηριστικά στα οποία αναφέρονται.οι διαπιστώσεις.

Στήλη 4: Η πρόταση ονομασίας που δόθηκε συνολικά από τους μαθητές.

Στήλη 5: Ο ορισμός της αυτοομοιότητας από τους μαθητές.

Στήλη 6: Αν δόθηκαν και ποια ήταν τα κύρια παραδείγματα εφαρμογής της νέας γεωμετρικής προσέγγισης στη φύση.

Στην πρώτη γραμμή αναγράφεται η κάθε ως άνω στήλη. Στη δεύτερη και τρίτη γραμμή σημειώνονται οι σχετικές αιτιολογήσεις των μαθητών.

Εικόνα που καθοδήγησε (Η)	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Brocolli Romanesco	Επαναλαμβανόμενα μοτίβα	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ

	Τρισδιάστατες εικόνες με ατελείωτα σχέδια και ατελείωτες αυτόμοιες εικόνες.	Αυτοομοιότητα	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα σε τρισδιάστατες εικόνες.*	*Υπάρχει κάποιο σχήμα που επαναλαμβάνετε πολλές φορές μέχρι να γεμίσει το χώρο*	*Κουνουπίδι, έλατο*
		Γεννήτρια			

Πίνακας 6α. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη και όλων των μαθητών από κοινού

2. Γυμνάσιο Περαίας (6 ομάδες), 2006.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
5	4	1	5	1
Τα σχέδια δεν σταματούν ποτέ	*Ίδια διαδρομή, ίδιο σχήμα, ίδιο χρώμα*	*Τα ίδια σχέδια που δεν σταματούν ποτέ στην ίδια κατεύθυνση*		

Πίνακας 5β. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Εικόνα που καθοδήγησε	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
	Περίεργες, πολύπλοκες, ατελείωτα συνεχόμενες	Επαναληπτικότητα	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ
	Πολλές μικρές όμοιες εικόνες	Αυτοομοιότητα			
	-	Γεννήτρια			

Πίνακας 6β. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

3. 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 10), 2006.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
5	4	4	5	
Οι εικόνες είναι ίδιες δηλαδή επαναλαμβάνονται (συσπειρώνονται και επαναλαμβάνονται)	*Η μουσική συνεχίζει ίδια όπως και η εικόνα*	*Επαναλαμβανόμενα ίδια σχήματα*	*Επαναλαμβάνεται το ίδιο σχήμα στις εικόνες, έχουμε την αίσθηση ότι οδηγούν στο άπειρο*	

Πίνακας 5γ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Εικόνα που καθοδήγησε	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
σπειροειδές σχήμα	*Επαναλαμβανόμενες εικόνες*	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ
	επαναλαμβανόμενες και άπειρες γιατί στις εικόνες αυτές επαναλαμβάνονται τα ίδια σχήματα άπειρες φορές.	Αυτοομοιότητα	*Επαναλαμβανόμενες εικόνες*		
		Γεννήτρια			

Πίνακας 6γ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

4. 7ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 7), 2007.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
6	5	4	5	1
Επαναλαμβανόμενα πολλά σχήματα με μόνες διαφορές στα χρώματα ή στο μέγεθος)	*Αποτελούνται από πάρα πολλά ίδια γεωμετρικά σχήματα*	*σχήματα επαναλαμβάνονται συνεχώς σαν σπιράλ*	*Στα περισσότερα σχήματα υπάρχει ένα κεντρικό σημείο. Από αυτό το σημείο αρχίζει το σχήμα να επαναλαμβάνεται και να μεγεθύνεται φανερώνοντας καλύτερα τα σχήματα*	

Πίνακας 5δ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Εικόνα που καθοδήγησε	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Brocolli Romanesco	*Περιστρεφόμενες και επαναλαμβανόμενες*	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
	εικόνες με προοπτική σε σχήμα έλικας	Αυτοομοιότητα	*Ατελείωτες αυτοόμοιες εικόνες*	*Όμοιες με τον εαυτό τους*	*εικόνες βασισμένες στη γεωμετρία στη φύση*
		γεννήτρια			

Πίνακας 6δ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

5. 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 9), 2007.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
6	3	2	5	
Το σπιράλ	*Επαναλαμβάνεται το*	*Συγκεκριμένα,*	*Έτσι όπως από*	

επαναλαμβάνεται ατέλειωτα	*ίδιο σε όλες τις εικόνες.*	*ομοιόμορφα, και ατελείωτα σχήματα*	*το εσωτερικό του τριγώνου «γεννιέται» ένα άλλο έτσι και από τον ήχο βγαίνει ένα άλλος*	

Πίνακας 5ε. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας

Εικόνα που καθοδήγησε	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Brocolli Romanesco	*Πολυμορφικά ατελείωτα σχέδια*	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
	Ατελείωτα αναλογικά σχήματα (*επανάληψη όμοιων γεωμετρικών σχημάτων*)	Αυτοομοιότητα	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Αυτοομοιότητα* (*όμοια γεωμετρικά σχήματα μέσα στην ίδιο το σχήμα*)	*κουνουπίδι*
		Γεννήτρια			

Πίνακας 6ε. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

6. 3ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 13), 2007.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
4	8	7	1	1
Συμμετρικά, σπειροειδή επαναλαμβανόμενα σχέδια και σχήματα		*Βλέπουμε σχήματα που επαναλαμβάνεται το ίδιο μοτίβο συνεχώς, το ένα μέσα στο άλλο*	*Έχουνε σαν βάση μια εικόνα και αυτή αναλύεται σε άλλες ίδιες μικρότερες*	*Η έννοια του βάθους, της αρμονίας*

Πίνακας 5στ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας

Εικόνα που καθοδήγησε	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Brocolli Romanesco.	*Απειροειδή σχήματα*	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
		Αυτοομοιότητα	*Βασίζονται σε ένα ομοιόμορφο μοτίβο ή σχήμα*	*Ομοιόμορφο μοτίβο*	*Έλατο, τυφώνας*
	Αντιγραφή αρχικού σχήματος άπειρες φορές	Γεννήτρια			

Πίνακας 6στ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

7. 4ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 11), 2007.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
4	5	4	1	1
	Είναι αφηρημένα, επαναλαμβάνεται το ίδιο σχήμα	*Οι πρώτες εικόνες είναι υποδιαίρεση της επόμενης. Είναι σαν το τρίγωνο της δραστηριότητας Α*	*Η εικόνα αποτελείται από ένα σχήμα που υπάρχει πολλές φορές σε διαφορετικά μεγέθη που αν μεγεθυνθούν παραμένουν τα ίδια. Επίσης είναι συμμετρικά σχήματα*	*Ατελείωτα σχέδια, σύνδεση χρωμάτων και γεωμετρικών σχημάτων με ωραίο τρόπο.*

Πίνακας 5ζ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας

Εικόνα που καθοδήγησε	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Brocolli Romanesco	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
	Ατελείωτες αυτοόμοιες εικόνες	Αυτοομοιότητα	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Ατελείωτες όμοιες με τον εαυτό τους εικόνες*	*Έλατο*
		Γεννήτρια			

Πίνακας 6ζ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

Μια ενδιαφέρουσα διαπίστωση ομάδας από την απομαγνητοφώνηση αυτής της τάξης αναφέρεται στη νέα γεωμετρία: *Υπάρχει κάποιο σχήμα που επαναλαμβάνεται πολλές φορές μέχρι να γεμίσει το χώρο, όπως είδαμε στον υπολογιστή. Στην γεωμετρία του Ευκλείδη δεν συμβαίνει αυτό.*

8. Γυμνάσιο Επανομής (ομάδες 9), 2007.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
6	2	2	3	2
Τα σχέδια δεν σταματούν ποτέ. Τα σχήματα κινούνται		*Παρατηρούμε σχέδια που συνεχίζονται με το ίδιο σχήμα μέχρι*	*Διάφορα σχέδια που δημιουργούνται*	*Μας δίνουν την αίσθηση της*

συνέχεια, χωρίς να υπάρχει τέλος		*το άπειρο σαν να μην έχουν τέλος*	*συνεχώς*	*τελειότητας, καθώς και την έννοια του αφηρημένου και το άπειρο.*

Πίνακας 5η. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Εικόνα που καθοδήγησε	Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Brocolli Romanesco	*Κίνηση του άπειρου*	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
	Τάξη στο χάος	Αυτοομοιότητα	*Τάξη στο χάος*	*Ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο*	Έλατο, κουνουπίδι κ.λπ.
	-	Γεννήτρια			*Γιατί επαναλαμβάνεται επ άπειρο και σχηματίζει δάση αλλά και γιατί αν το δούμε στο μικροσκόπιο είναι η ίδια πάντα λεπτομέρεια που επαναλαμβάνεται και δίνει τα κλαδιά.*
	Ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο.	Άλλο			

Πίνακας 6η. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

Πολύ ενδιαφέρουσες οι καταγραφές:

1. *Ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο.*

2. *Τάξη στο χάος.*

Το παιχνίδι του χάους στο τμήμα όπως προαναφέρθηκε αυτό δεν πραγματοποιήθηκε, και δεν έγινε καμία παρόμοια αναφορά. Οι δυο καταγραφές πρέπει να σχετίζονται με την παρακολούθηση της προβολής των κλασματοειδών σχημάτων και την ενδεχόμενη μεταγνωστική επέκτασή τους από τους μαθητές.

9. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 12), 2008.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
5	2	2	3	2
Ομοιόμορφες συνεχώς σε επανάληψη	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα τα οποία είναι ίδια αλλά σε διαφορετική κλίμακα*	Άπειρη επανάληψη του ίδιου σχήματος Ομοιόμορφες επαναλήψεις	Έχουν αρχικό κορμό και επαναλαμβάνονται συνέχεια δημιουργώντας όμοια με το αρχικό σχεδία	

Πίνακας 5θ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Περιοδική απεικόνιση	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Συγκεκριμένο σχήμα που επαναλαμβάνεται καθώς μεγεθύνονται	Αυτοομοιότητα	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	Έλατο, κουνουπίδι , σύμπαν κλπ
-	Γεννήτρια			
	Άλλο			

Πίνακας 6θ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

Από το γυμνάσιο αυτό και μετά καταργήθηκε η ερώτηση για την εικόνα που καθοδήγησε τους μαθητές για τους λόγους που αναφέρονται στην επόμενη ενότητα VII.3, και η σχετική στήλη αφαιρέθηκε στο εξής από τον πίνακα 6.

10. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 9), 2008.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
3	3	3	3	-
Παντού υπάρχει επανάληψη	*Τα σχήματα φαίνονται να αλλάζουν αλλά τελικά είναι τα ίδια.*	*Υπάρχει συνεχής αυτοομοιοτητα*	*Όλα τα σχήματα είναι όμοια με το αρχικό. Κάθε ένα χρησιμοποιεί ένα σχήματα, το μικραίνει η το μεγαλώνει και το επαναλαμβάνει συνεχώς*	

Πίνακας 5ι. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση

Επαναλαμβανόμενα σχήματα	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Επαναλαμβανόμενη όμοια τέχνη	Αυτοομοιότητα	*Συνεχής αυτοομοιοτητα*	*Συνεχής αυτοομοιοτητα, όμοια με τον εαυτό τους επαναλαμβανόμενα σχήματα*	Μαίανδρος, έλατο, κουνουπίδι κλπ
Όμοια με το αρχικό	Γεννήτρια			
	Άλλο			

Πίνακας 6ι. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

Χαρακτηριστικό των καταγραφών της δραστηριότητας Γ εδώ είναι η άνετη χρήση της έννοιας «αυτοομοιότητα» από τους μαθητές. Η έννοια ορίστηκε ομόφωνα σαν *όμοια με τον εαυτό τους επαναλαμβανόμενα σχήματα.*

11. 2ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 11), 2008.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
9	3	9	2	-
Το μέγεθος αλλάζει με τη συνέχεα της διαδικασίας χωρίς τέλος	*Επανάληψη ίδιων μοτίβων*	*Στις εικόνες επαναλαμβάνονται τα ιδία σχήματα άπειρα Επαναλαμβάνεται το ίδιο και νιώθεις ότι υπάρχει βάθος. Δεν υπάρχει τέλος*	*Άπειρα είδωλα ιδία με τα αρχικά*	

Πίνακας 5κ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Εικόνες χωρίς τέλος	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Ομοιότητα με επέκταση Επαναλαμβανόμενες ομοιότητες	Αυτοομοιότητα	*Επαναλαμβανόμενη ομοιότητα*	*Χωρίς τέλος προέκταση της ομοιότητας*	*Το κουνουπίδι, τα φύλλα κάποιων δέντρων, κύτταρα, νιφάδες χιονιού μικροοργανισμοί*
	Γεννήτρια			
χαοτικές	Άλλο			

Πίνακας 6κ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

12. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
6	3	3	-	-
Επαναλαμβάνονται άπειρες φορές	*Κάθε εικόνα είχε όμοια σχήματα*	*Εικόνες επαναλαμβανόμενες, όμοιες λεπτομέρειες*		

Πίνακας 5λ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Επαναλαμβανόμενα σχήματα	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
	Αυτοομοιότητα	*Εικόνες με όμοιες λεπτομέρειες*	*Σχήματα με όμοιες λεπτομέρειες*	*Μπρόκολο, σταλαγμίτης, κουκουνάρια, δέντρο*
	Γεννήτρια			
	Άλλο			

Πίνακας 6λ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

13. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
6	3	3	-	-
	Επανάληψη όμοιων πραγμάτων	*Επανάληψη των ίδιων εικόνων άπειρες φορές*		

Πίνακας 5μ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Επαναλαμβανόμενα πράγματα	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
	Αυτοομοιότητα	*Εικόνες με επαναλαμβανόμενες λεπτομέρειες*	*Όμοιες λεπτομέρειες επαναλαμβάνονται συνεχώς*	*Κουκουνάρια, μπρόκολο, αιμοσφαίρια*
	Γεννήτρια			
	Άλλο			

Πίνακας 6μ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

14. 1ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 9), 2009.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
6	3	3	-	2
Δεν τελειώνουν ποτέ και σε κάθε εικόνα επαναλαμβάνονται τα ίδια σχήματα		*Κάθε φορά επαναλαμβάνονται κάποια σημεία τους*		*Όλες φαίνεται να έχουν κάποιο βάθος και να χάνεσαι σε αυτό. Ήταν εκθαμβωτικές*

Πίνακας 5ν. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Δεν υπάρχει τέλος	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Επαναλαμβανόμενη ομοιότητα	Αυτοομοιότητα	*Άπειρα επαναλαμβανόμενες αυτοόμοιες εικόνες*	*Επαναλαμβανόμενες και όμοιες με τον εαυτό τους*	Ελατό, (γενικά μερικά φυτά), το μπρόκολο, θάμνοι, το κοράλλι
	Γεννήτρια			
	Άλλο			

Πίνακας 6ν. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

15. 5ο γυμνάσιο Βόλου (12 ομάδες), 2009.

Αναφορές σε επαναληπτκότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε αυτοομοιότητα, παράδειγμα	Αναφορές σε επαναληπτκότητα και αυτοομοιότητα	Αναφορές σε γεννήτρια	Άλλο
10	10	10	2	1
Σε όλα τα σχήματα υπάρχουν πολλές μικρότερες επαναλήψεις του μεγαλύτερου	*Σε ένα τμήμα του σχήματος περιέχονται πολλά όμοια του σε διαφορετικό μέγεθος* *Καθένα περιέχει όμοια γεωμετρικά σχήματα* *Όμοια σχήματα γιατί παίρνουμε το αρχικό και το μεγεθύνουμε η το μικραίνουμε*	*Σε κάθε σχηματιστεί εμφανίζεται μια λεπτομέρεια που επαναλαμβάνεται συνέχεια* *Τα ιδία σχήματα επαναλαμβάνονται σε διάφορα μεγέθη*	*Ίδιο με το αρχικό* *Επανάληψη επ άπειρο αρχικού σχήματος*	*Είναι όλα συσχετισμένα με ένα γεωμετρικό σχήμα*

Πίνακας 5ξ. Κατηγοριοποίηση περιγραφών εικόνων fractal της δραστηριότητας Γ

Κύριες διαπιστώσεις	Βασικό χαρακτηριστικό	Ονομασία εικόνων	Διατυπώθηκε η αυτοομοιότητα	Εφαρμογή στη φύση
Επαναλαμβανόμενα σχήματα	Επαναληπτικότητα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Επαναλαμβανόμενη ομοιότητα *Ένα μεγάλο σχήμα όμοιο με τα κομμάτια του*	Αυτοομοιότητα	*Αυτοόμοιες*	*Αυτοόμοιες Ονομάζονται έτσι γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό*	*Το κοράλλι, τα φύλλα δέντρων, κύτταρα, κύματα της θάλασσας κουνουπίδι χόρτο σφουγγάρι*
Ίδιο με το αρχικό	Γεννήτρια			
	Άλλο			

Πίνακας 6ξ. Διαπιστώσεις από όλη την τάξη από κοινού

Αντίθετα από την προηγούμενη δραστηριότητα, στο γυμνάσιο αυτό η αυτοομοιότητα των σχημάτων διαπιστώθηκε και αιτιολογήθηκε σε ασυνήθιστα μεγάλο ποσοστό (10/12). Ακόμη δόθηκε από την τάξη από κοινού αυτούσιος ο ορισμός της αυτοομοιότητας στην ονομασία των εικόνων:

Γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό.

Προτάθηκαν από κάποιους μαθητές και οι καταγραφές:

Ένα μεγάλο σχήμα όμοιο με τα κομμάτια του ή *επαναλαμβανόμενη ομοιότητα που είναι φράσεις* σχεδόν ταυτόσημες με τον ορισμό της θεωρίας (κεφάλαιο ΙΙ 2.3.4. και κεφάλαιο VII. 1).

2.4 Δραστηριότητα Δ . Διάσταση αυτοομοιότητας τριγώνου Sierpinski

1. 7ο γυμνάσιο Βόλου (7 ομάδες), 2006.

Η δραστηριότητα αποσκοπεί στη μαθηματικοποίηση της γνωστής πια έννοιας της αυτοομοιότητας, με τη χρήση του γνωστού στους μαθητές λόγου ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων. Η καταγραφή δεκαδικού αριθμού στον εκθέτη του λόγου ομοιότητας που αφορά το τρίγωνο Sierpinski είναι πρωτόγνωρη για τους μαθητές (κεφάλαιο VII α, 1. 10 Κωδικός διάσταση). Αναμένεται ωστόσο με τη βοήθεια του πίνακα ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων, η καταγραφή $2^{1,5} = 3$ σαν ενδιάμεσο της αντίστοιχης καταγραφής ευθ. τμήματος 2^1 και τετραγώνου 2^2. Η αιτιολόγηση της καταγραφής και η αναφορά σε διάσταση απαιτεί ένα νοητικό άλμα από τους μαθητές και οι σχετικές ερωτήσεις στο φύλλο εργασίας αποσκοπούσαν αρχικά σε συλλογή δεδομένων για τη σκέψη των μαθητών στο σημείο αυτό. Τα αποτελέσματα όμως σπουδής περίπτωσης (κεφάλαιο VI) καθώς και η επεξεργασία των καταγραφών των πρώτων γυμνασίων τα έτη 2006 και 2007 έδειξε ότι μπορεί να επιδιωχθεί και η κάλυψη του τελευταίου μέρους από το επιστημονικό περιεχόμενο που μας ενδιαφέρει δηλ. της διάστασης αυτοομοιότητας.

Ειδικότερα στον πίνακα 7 σημειώνονται τα εξής:

Στήλη 1: Εύρεση του λόγου ομοιότητας με εκτίμηση αριθμού ίδιων κομματιών κατά το διπλασιασμό πλευράς και ταύτιση του εκθέτη λόγου ομοιότητας με γεωμετρική διάσταση. Αναγράφεται ο αριθμός των σωστών καταγραφών.

Στήλη 2: Αναγράφεται ο αριθμός καταγραφών με δεκαδικό εκθέτη (συνήθως 1,5) στον πίνακα λόγου ομοιότητας.

Στήλη 3: Αναγράφεται η κύρια αιτιολόγηση της καταγραφής στη στήλη 2.

Στήλη 4: Αναγράφονται οι καταγραφές των μαθητών σχετικά με ενδεχόμενη δεκαδική διάσταση.

Στη δεύτερη και τρίτη γραμμή σημειώνονται ο αριθμός των ομάδων και οι σχετικές αιτιολογήσεις των μαθητών.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση (κωδικός Ι)
7	4	4	4
		Ότι δεν μιλάμε πια μόνο για φυσικούς αριθμούς αλλά και για δεκαδικούς	*Μια καινούρια διάσταση που δεν περιέχει φυσικούς αριθμούς*

Πίνακας 7α: Εύρεση της διάστασης Sierpinski στον πίνακα ομοιότητας και οι σχετικές αιτιολογήσεις των μαθητών

2. Γυμνάσιο Περαίας (6 ομάδες), 2006.

Η δραστηριότητα Δ δεν πραγματοποιήθηκε.

3. 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 10), 2006.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
10	6	6	4
		Αυτό σημαίνει ότι μόνο ένας άρρητος αριθμός στον κόσμο σαν εκθέτης του 2 μας κάνει 3	*Οι αριθμοί αυτοί λέγονται άρρητοι που σημαίνει ότι δεν γράφονται με κλάσμα, η διάσταση, μπορεί να είναι άρρητος αριθμός*

Πίνακας 7γ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

4. 7ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 7), 2007.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
7	2	-	2
			Στη φύση υπάρχουν άπειρες διαστάσεις

Πίνακας 7δ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

5. 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 9), 2007.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
8	6	2	2
		Γιατί πρέπει να είναι ανάμεσα στο 1 και στο 2, προφανώς βάζοντας δεκαδικό εκθέτη 1,5, ή $2^{1,}$= 3και άλλα πολλά δεκαδικά ψηφία (άρρητος)	*θα μπορούσε ίσως να σημαίνει ότι αντιστοιχεί σε κάποια διάσταση*

Πίνακας 7ε: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

6. 3ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 13), 2007.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
12	-	2	1
		Το χ δεν υπάρχει, εκτός και αν γίνεται να είναι δεκαδικός	*Ότι το νέο τρίγωνο δεν θα έχει φυσικούς αριθμούς στις διαστάσεις*

Πίνακας 7στ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Όπως προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο VII.1. στο γυμνάσιο αυτό εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά το β και γ μέρος της δραστηριότητας αυτής. Μετά τη συλλογή αρκετών δεδομένων στον πίνακα 7 από τα προηγούμενα 5 γυμνάσια, η επεξεργασία τους έδειξε ότι είναι δυνατή η προσπάθεια διδακτικής αξιοποίησης της διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski. Το 3ο γυμνάσιο Καλαμαριάς ήταν το πρώτο όπου επιδιώχθηκε ο ακριβής υπολογισμός και η αιτιολόγησή της.

Συγκεκριμένα στο νέο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας δίνεται στους μαθητές γράφημα της συνάρτησης: $2^{\chi} = 3$ (βλ. VII α, 1.10 διάγραμμα 3.) Το γράφημα αποτελεί -όπως και ο πίνακας ομοιότητας- βοηθητικό εργαλείο για να εντοπιστούν από τους μαθητές οι συντεταγμένες (1,2), (2,4), (χ,3), (3,8).

Η καμπύλη της συνάρτησης βοηθά ακόμη να εκτιμήσουν οι μαθητές με μεγαλύτερη ακρίβεια τον εκθέτη (χ = 1,6 περίπου) και να διαπιστώσουν τη συνέχεια των πιθανών τιμών του χ. Η σύνδεσή του με τη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski (ήδη γνωστή από το πρώτο μέρος της δραστηριότητα Δ), αποτελεί πλέον γνωστικό στόχο της δραστηριότητας. Σχετική ερώτηση στο φύλλο εργασίας αλλά και επεξηγήσεις από τους μαθητές δείχνουν την επιτυχία του γνωστικού στόχου ή όχι. Τα αποτελέσματα σημειώνονται στη 2η στήλη του πίνακα 8.

Στο τρίτο μέρος της δραστηριότητας επιδιώκουμε να υπολογίσουν οι ίδιοι οι μαθητές το *χ* με τη βοήθεια υπολογιστών τσέπης και των οδηγιών χρήσης. Τόσο από το γράφημα όσο και από τη διαδικασία υπολογισμού, αναμένεται πλέον να διαπιστωθεί από τους μαθητές ότι η διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski είναι άρρητη. Αυτό αποτελεί νέο γνωστικό στόχο της δραστηριότητας Δ.

Ειδικότερα στον πίνακα 8 σημειώνονται οι ομάδες με τις σωστές καταγραφές ως εξής:

Στήλη 1: Σημειώνεται ο αριθμός των καταγραφών με εύρεση στη γραφική παράσταση του εκθέτη για το τρίγωνο Sierpinski.

Στήλη 2: Σημειώνεται ο αριθμός των καταγραφών που συνδέουν τον εκθέτη με τη διάσταση αυτοομοιότητας. Αναφορά και επεξηγήσεις από μαθητές.

Στήλη 3: Σημειώνεται ο αριθμός των καταγραφών με διαπίστωση του άρρητου εκθέτη για το τρίγωνο Sierpinski.

Στήλη 4: Σημειώνεται η καλύτερη προσέγγιση της διάστασης αυτοομοιότητας από τις ομάδες των μαθητών με βοήθεια υπολογιστών τσέπης.

Στη δεύτερη και τρίτη γραμμή σημειώνονται ο αριθμός των ομάδων και οι σχετικές αιτιολογήσεις των μαθητών.

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
8	8	6	χ=1,5919975
		Και στις άλλες εικόνες που είδαμε η διάσταση αυτοομοιότητας θα είναι δεκαδικός, άρρητος αριθμός.	

Πίνακας 8στ*: Εύρεση του εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας από τους μαθητές*

Μια ενδιαφέρουσα γενίκευση στο γυμνάσιο αυτό ήταν: *Και στις άλλες εικόνες που είδαμε η διάσταση αυτοομοιότητας θα είναι δεκαδικός, άρρητος αριθμός*.

7. 4ο γυμνάσιο Καλαμαριάς (ομάδες 11), 2007.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
10	9	3	2
		Δύο στην πρώτη είναι δύο, δυο στην δευτέρα είναι τέσσερα άρα δύο στην ένα και μισό είναι τρία γιατί είναι το ενδιάμεσο	*Δεν υπάρχουν μόνο ακέραιες διαστάσεις η διάσταση 1,5 βρίσκεται ανάμεσα στη διάσταση μήκος και στη διάσταση μήκος και πλάτος*

Πίνακας 7ζ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη (κωδικός Κ)	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
11	8	8	χ=1,5807
	1. Η διάσταση της σκόνης θα είναι μηδέν κόμμα κάτι, 0,16….. *2. Ένα παράδειγμα: Μια λεπτή γραμμή έχει διάσταση 1 αλλά μπορεί να γίνει και πιο χοντρή και τότε 1 και κάτι, ανάμεσα από το ένα και το δύο* *3. Το χαρτί σε μεγέθυνση 2, 6. Μήκος και πλάτος και λίγο ύψος.* *4. Μήκος και πλάτος, αλλά μπορεί να είναι και δεκαδικοί αριθμοί ανάμεσα με συνεχή μεγέθυνση.*	*Διάσταση δεν μπορεί να είναι μόνο 1, 2, 3 αλλά μεγεθύνοντας ένα σχήμα μπορεί να βρούμε και άρρητες διαστάσεις ανάμεσα.*	

Πίνακας 8ζ: *Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας*

Πολλές είναι στο γυμνάσιο αυτό οι αναλυτικές καταγραφές για τη διάσταση αυτοομοιότητας (στήλη 2 του πίνακα 8).

8. Γυμνάσιο Επανομής (ομάδες 9), 2007.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
8	2	2	4
			α. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε 1,5 διαστάσεις και όχι 2.

			β. Η διάσταση μπορεί να έχει συγκεκριμένη τιμή, μέτρο. Αλλά μπορεί να είχε την έννοια του άπειρου, της συνοχής

Πίνακας 7η: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Η ενδιαφέρουσα αιτιολόγηση που αναγράφεται στην 4η στήλη είναι από την ίδια ομάδα που κατέγραψε ότι *ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο* στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
6	8	6	χ=1,6

Πίνακας 8η: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας

9. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 12), 2008.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
12	10	5	4
		Είναι ανάμεσα στο 1 και στο 2	*1.Η διάσταση είναι μεταξύ 1 έως 3, άρα οι διαστάσεις είναι άπειρες.* *2. Υπάρχουν κάποιες λεπτομέρειες μη ορατές που έχουν δεκαδικές διαστάσεις.* *3 Οι διαστάσεις μπορεί να είναι ακέραιες ή δεκαδικές, δεν είμαστε σε θέση να το καταλάβουμε διότι εμπεριέχει την κίνηση και έχει άπειρες επαναλήψεις.*

Πίνακας 7θ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Η καταγραφή *οι διαστάσεις μπορεί να είναι ακέραιες ή δεκαδικές, διότι εμπεριέχει την κίνηση και έχει άπειρες επαναλήψεις* είναι στην ουσία η εξήγηση της θεωρίας αλλά προσθέτει σχεδόν αμέσως *διότι δεν είμαστε σε θέση να το καταλάβουμε*, πράγμα που δείχνει τη δυσκολία αποδοχής μιας δεκαδικής ή άρρητης διάστασης.

Η δυσκολία αυτή φαίνεται και στον πίνακα 8, όπου παρόλο που διαπιστώθηκε σύνδεση του έκθετη με διάσταση αυτοομοιότητας από πολλές ομάδες, 4 ομάδες τελικά κατέγραψαν: *Δεν πιστεύω ότι υπάρχουν δεκαδικές διαστάσεις.*

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
10	7	12	χ=1,585
	Γιατί είναι όμοιο με τον εαυτό του δηλαδή με το αρχικό σχηματιστεί. Δεν πιστεύω ότι υπάρχουν δεκαδικές διαστάσεις		

Πίνακας 8θ: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας

10. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 9), 2008.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
9	7	2	2
		Είναι ανάμεσα στο 1 και στο 2	*Ότι οι διαστάσεις δεν είναι ακέραιες. Υπάρχει μια συνεχόμενη κίνηση. Υπάρχει αυτοομοιότητα*

Πίνακας 7ι: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
8	7	9	χ=1,585
	Γιατί είναι όμοιο με το αρχικό και υπάρχουν άπειρες μη ακέραιες διαστάσεις		

Πίνακας 8ι*: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας*

11. 2ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 11), 2008.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
11	8	1	6
		α Το χ είναι λίγο μεγαλύτερο από 1,5 *β. Διαπιστώνουμε ότι δε βγαίνει ακριβώς αλλά ξέρουμε ότι ο εκθέτης δεν μπορεί να είναι δεκαδικός*	*α. Οι διαστάσεις είναι όσο και το χ περίπου 1,6* *β. ο αριθμός των διαστάσεων είναι δεκαδικός γιατί ο εκθέτης δεν είναι ακέραιος*

Πίνακας 7κ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
11	8	9	χ=1,585
	Επειδή όπου και αν βρίσκεσαι όσο βαθιά και αν πας θα είναι το ίδιο με το αρχικό σχηματίζονται, αυτοομοιότητα	*α. Επειδή το τρίγωνο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές αλλά ταυτίζεται με το αρχικό είναι άρρητος αριθμός* *β. Το χ πρέπει να είναι άρρητος επειδή το τρίγωνο επαναλαμβάνεται ίδιο με το αρχικό*	

Πίνακας 8κ: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας

Είναι φανερή η δυσκολία των μαθητών να αποδεχτούν ότι μια διάσταση μπορεί να είναι δεκαδικός: *Διαπιστώνουμε ότι δεν βγαίνει ακριβώς αλλά ξέρουμε ότι ο εκθέτης δεν μπορεί να είναι δεκαδικός*

12. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση

6	6	3	2
		α Περίπου 1,6 *β. Δεν είναι ακέραιος επειδή είναι σε κίνηση.*	*α. Ότι οι διαστάσεις είναι άπειρες επειδή δεν είναι ακέραιες.* *β. Γιατί στη φύση δεν υπάρχουν ακριβείς διαστάσεις*

Πίνακας 7λ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Στο γυμνάσιο αυτό οι μαθητές κατέγραψαν από την αρχή της δραστηριότητας (από τον πίνακα 7 ακόμη) χ = 1,6 περίπου στη διάσταση Sierpinski. Ωστόσο αυτό το πολύ καλό πρώιμο αποτέλεσμα δεν βελτιώθηκε στη συνέχεια και οι μαθητές πέτυχαν τη χειρότερη δυνατή προσέγγιση σε σχέση με τα άλλα γυμνάσια στον επόμενο πίνακα. Στην καταγραφή *γιατί στη φύση δεν υπάρχουν ακριβείς διαστάσεις,* εννοεί ακέραιες διαστάσεις. Αυτό έγινε πριν γίνει οποιαδήποτε σχετική αναφορά σε άλλα κλασματοειδή σχήματα (στην επόμενη δραστηριότητα).

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
6	4	6	χ=1,6
	Γιατί ουσιαστικά είναι το ίδιο με τον εαυτό του με άρρητη διάσταση		

Πίνακας 8λ: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας

13. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 6), 2009.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
6	6	-	3
			α. Μπορεί οι διαστάσεις να είναι ακέραιες ή όχι επειδή το τρίγωνο αυτό δεν έχει τέλος. *β. Δεν υπάρχει τέτοια διάσταση* *γ. Οποιαδήποτε είναι διάσταση*

Πίνακας 7μ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Οι αντιφατικές καταγραφές: *Δεν υπάρχει τέτοια διάσταση. Οποιαδήποτε είναι διάσταση,* είναι άλλη μια ένδειξη της δυσκολίας αποδοχής μη ακέραιης διάστασης από τους μαθητές.

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
4	3	6	χ=1,585
	Γιατί το τρίγωνο έχει επαναλαμβανομένη αυτοομοιότητα στο απειρο	*Ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων αλλάζει λόγω της κίνησης*	

Πίνακας 8μ: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας

14. 1ο γυμνάσιο Μίκρας (ομάδες 9), 2009.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
9	8	1	5
		Το 3 είναι ένας περίεργος αριθμός, άλλα με κάποιο τρόπο τον απλοποιήσαμε	*α. Οι διαστάσεις είναι άπειρες β. Αφού ο αριθμός των διαστάσεων είναι δεκαδικός χωρίς τέλος, είναι όπως οι επαναλήψεις, είναι άπειρες γ. Οι διαστάσεις του τρίγωνου είναι όσο και το χ δηλαδή 1,5*

Πίνακας 7ν: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
9	7	9	χ=1,585
	α. Δεν μπορούμε να βάλουμε αριθμό διαστάσεων επειδή ο αριθμός που βρήκαμε δεν είναι ακέραιος. Εκτός και αν γίνεται να μπει το 1,59…. άλλα δεν	*Επειδή το τρίγωνου δεν έχει τέλος για αυτό και ο εκθέτης είναι δεκαδικός (άρρητος)*	

	το έχουμε διδαχτεί. *β. οι διαστάσεις είναι 1,65 και αυτό συμβαίνει γιατί το τρίγωνου* sierpinski *είναι όμοιο και δεν έχει τέλος*		

Πίνακας 8ν: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας

Υπάρχουν αρκετές ενδιαφέρουσες καταγραφές, παρόλο που δε χρησιμοποίησαν τη λέξη αυτοομοιότητα:

Οι διαστάσεις είναι 1,65 και αυτό συμβαίνει γιατί το τρίγωνου sierpinski *είναι όμοιο και δεν έχει τέλος.*

Ωστόσο είναι φανερή η δυσκολία των μαθητών να αποδεχτούν ότι μια διάσταση μπορεί να είναι δεκαδικός μάλιστα άρρητος αριθμός, σε αντίθεση με τα όσα έχουν διδαχτεί μέχρι τότε:

Δεν μπορούμε να βάλουμε αριθμό διαστάσεων επειδή ο αριθμός που βρήκαμε δεν είναι ακέραιος. Εκτός και αν γίνεται να μπει το 1,59…. άλλα δεν το έχουμε διδαχτεί.

15. 5ο γυμνάσιο Βόλου (12 ομάδες), 2009.

Εύρεση του λόγου ομοιότητας	Καταγραφή εκθέτη $2^{1,5} = 3$	Αιτιολόγηση	Αναφορά σε δεκαδική διάσταση
12	10	5	6
		Το χ είναι δεκαδικός αριθμός, 1,5 *Το χ βρίσκεται ανάμεσα στο 1 και στο 2*	*α. Καινούρια διάσταση προφανώς. Διάσταση αυτοομοιότητας, γιατί είναι σχήμα όμοιο με τον εαυτό του.* *β είναι μια καινούρια διάσταση* *γ. ο αριθμός των διαστάσεων είναι δεκαδικός 1,5 γιατί τόσο είναι ο εκθέτης* *δ. δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δεκαδικές διαστάσεις*

Πίνακας 7ξ: Εύρεση του λόγου ομοιότητας

Στο γυμνάσιο αυτό έχουμε από την αρχή της δραστηριότητας τις περισσότερες ομάδες (10/12) από όλα τα άλλα γυμνάσια να σημειώνουν δεκαδικό έκθετη και να τον αιτιολογούν. Δεν διαπιστώθηκε καμιά δυσκολία των μαθητών στο να αποδεχτούν ότι μια διάσταση μπορεί να είναι δεκαδικός (6/12 ομάδες). Μια πολύ ενδιαφέρουσα πρόβλεψη από την αρχή της δραστηριότητας (από τον πίνακα 7 ακόμη):

Καινούρια διάσταση προφανώς. Διάσταση αυτοομοιότητας, γιατί είναι σχήμα όμοιο με τον εαυτό του.

Ενδιαφέρον έχουν και οι καταγραφές:

αφού ο αριθμός των διαστάσεων είναι δεκαδικός χωρίς τέλος, είναι όπως οι επαναλήψεις, είναι άπειρες,

οι διαστάσεις του τρίγωνου είναι όσο και το χ δηλαδή 1,5.

Αλλά έχουμε και δυο ομάδες που κατέγραψαν: *Δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δεκαδικές διαστάσεις.*

Εύρεση στη γραφική παράσταση $2^{1,6} = 3$	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Διαπίστωση άρρητου εκθέτη	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski
10	10	10	χ=1,589
	α. Είναι ο λόγος ομοιότητας του ίδιου σχήματος β. Ο λόγος αυτοομοιότητας δεν ορίζεται γ Αυτοομοιότητα επειδή το τρίγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του και όχι με άλλα τρίγωνα (ομοιότητα)	*Τα νέα σχήματα είναι όμοια με το αρχικό με άρρητες νέες διαστάσεις*	

Πίνακας 8ξ: Εύρεση εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας

Είναι ήδη φανερό ότι η αποδοχή της δεκαδικής διάστασης δεν ήταν εύκολη για τους μαθητές. Όπως προαναφέρθηκε όμως στο κεφάλαιο VII. 3 και αναφέρεται στην τελική πρόταση στο κεφάλαιο X, η μη αποδοχή της μετά το δεύτερο μέρος και το τρίτο μέρος της δραστηριότητας, περιορίστηκε τελικά στο 25% περίπου των μαθητών.

2. 5. Δραστηριότητα Ε. Γραμμή von Koch και γραμμή Cantor

9. Γ2 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 12), 2008.

Η μαθηματικοποίηση της διάστασης αυτοομοιότητας περιορίζεται στα μέχρι τώρα γυμνάσια στο τρίγωνο Sierpinski. Το τρίγωνο Sierpinski δεν είναι το μόνο σχήμα της κλασματοειδούς γεωμετρίας, οι μαθητές ωστόσο στα φύλλα εργασίας για τους λόγους που αναφέρονται στο κεφάλαιο VII. 3 και στην τελική πρόταση στο κεφάλαιο Χ, εργάζονται κύρια με αυτό. Αυτό όμως δεν είναι αρκετό για να γενικευτεί η διάσταση αυτοομοιότητας σε άλλα σχήματα της νέας γεωμετρίας. Για τον λόγο αυτό προστέθηκε στο φύλλο εργασίας μια νέα δραστηριότητα Ε, με την γραμμή von Koch και την γραμμή Cantor. Τα βασικά αυτά σχήματα της κλασματοειδούς γεωμετρίας εφαρμόζονται στο εξής στα φύλλα εργασίας σε κάθε παρέμβαση κατά τα έτη 2008 και 2009 με τους εξής γνωστικούς στόχους:

1. Ο πρώτος γνωστικός στόχος των νέων δραστηριοτήτων αναφέρεται στη σωστή σχεδίαση δύο επαναλήψεων των νέων σχημάτων όπως δηλαδή και γινόταν μέχρι τώρα μόνο με το τρίγωνο Sierpinski. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στην 1η στήλη των πινάκων 9 και 10 όπου αναγράφεται ο αριθμός των ομάδων που το πέτυχαν.

2. Η διαδικασία εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας γίνεται πλέον χωρίς τη βοήθεια του ερευνητή ή του καθηγητή, εξ ολόκληρου από τους μαθητές σε 2 βήματα:

α. Με υπενθύμιση της αντίστοιχης διαδικασίας του τριγώνου Sierpinski και μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων πριν και μετά την επανάληψη. Ζητείται από τους μαθητές η διατύπωση εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας με δικά τους λόγια. Ιδανικά για τη γραμμή von Koch : *Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς* *σχηματίστηκαν τελικά 4 ίδια τμήματα*. Και τη γραμμή Cantor: *Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματιστήκαν τελικά 2 ίδια τμήματα*.

β. Στη συνέχεια ζητείται ο σχηματισμός της εξίσωσης διάστασης αυτοομοιότητας των νέων σχημάτων (σε αντιστοιχία με την προηγούμενη δραστηριότητα) από τους μαθητές:

για την γραμμή von Koch. «Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά 4 ίδια τμήματα». (Αναμένεται το $3^{\chi} = 4$)

για την γραμμή Cantor. «Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματιστήκαν τελικά 2 ίδια τμήματα». (Αναμένεται το $3^{\chi} = 2$)

Στην ουσία αναμένεται με δικά τους λόγια ο αλγόριθμος και στη συνέχεια η εξίσωση της διάστασης αυτοομοιότητας. Τα αποτελέσματα, δηλαδή ο αριθμός των ομάδων με σωστή διατύπωση και σχηματισμό της εξίσωσης της διάστασης αυτοομοιότητας σημειώνεται στις στήλες 2 για τη γραμμή von Koch και 3 και Cantor αντίστοιχα στους πινάκες 9 και 10.

Ακολούθως ζητείται να υπολογιστεί με τη γνωστή διαδικασία ο υπολογισμός της διάστασης αυτοομοιότητας. Η καλύτερη προσέγγιση σημειώνεται στην 4η στήλη των πινάκων 9 και 10 για τη γραμμή von Koch και 3 και Cantor αντίστοιχα

3. Η γραμμή Cantor έχει ιδιαίτερη σημασία στην κλασματοειδή γεωμετρία (κεφάλαιο VII 1.12). Ζητούμε από τους μαθητές να καταγράψουν τις διαφορές που διαπιστώνουν σε σχέση τα άλλα σχήματα που γνώρισαν. Οι κυριότερες καταγραφές σημειώνονται στις στήλες 5 για την διαδικασία και 6 για την διάσταση, του πίνακα 9 αντίστοιχα.

4. Τέλος ζητείται η ταξινόμηση σχημάτων της ευκλείδειας και κλασματοειδούς γεωμετρίας (ευθύγραμμο τμήμα, σημείο, τρίγωνο, τρίγωνο sierpinski γραμμή von Koch, κύκλος, τετράγωνο, σφαίρα, κύβος, κώνος, σφουγγάρι Menger), σε σχέση τη διάσταση αυτοομοιότητας τους χ σε στήλες όπου $\chi=0$, $0<\chi<1$, $\chi=1$, $1<\chi<2$, $\chi=2$, $2<\chi<3$, $\chi=3$ (ενότητα VIII 3.6.2. και τελική πρόταση κεφάλαιο X).

Το τελευταίο αυτό μέρος της παρέμβασης (δραστηριότητα Ε μέρος ΙΙΙ) δεν περιέχει νέο γνωστικό στόχο. Η ταξινόμηση αυτή αποτελεί όμως μια τελική αξιολόγηση κατά τα έτη 2008 και 2009 για τη διαπίστωση της κατανόησης από τους μαθητές των διαφορών των σχημάτων ευκλείδειας και κλασματοειδούς γεωμετρίας. Στα σχήματα που αναφέρθηκαν πιο πάνω περιλαμβάνεται το σφουγγάρι Menger, τελείως άγνωστο στους μαθητές σχήμα της κλασματοειδούς γεωμετρίας (κεφάλαιο VII κωδικός Λδ). Αφού προβληθεί το σχήμα στο διαφανειοσκόπιο ζητείται και η δική του ταξινόμηση. Οι σωστές καταγραφές των παραπάνω σχημάτων σημειώνονται στην στήλη 5 για τα γνωστά σχήματα και στην στήλη 6 για το άγνωστο σφουγγάρι Menger στον πινάκα 10 αντίστοιχα και αποτελούν με τον τρόπο αυτό μια τελική αξιολόγηση (κεφάλαιο XI.2) για την επιτυχία των σχετικών με τη διάστασης αυτοομοιότητας γνωστικών στόχων των δραστηριοτήτων Δ, Ε.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων Cantor (κωδικός Λγ)	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Διαδικασία Cantor	Διάσταση Cantor
12	12	12	χ=0,62	*Μένουν άπειρα ίσα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα*	*Το αποτέλεσμα διαφέρει παρόλο που είναι όλοι άρρητοι αριθμοί διότι είναι μικρότερο της μονάδας. Αυτό συμβαίνει διότι το δεύτερο μέρος της εξίσωσης είναι μικρότερο από το πρώτο.*

Πίνακας 9θ*: Σκόνη Cantor*

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων von Koch (κωδικός Λβ)	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Ταξινόμηση γνωστών σχημάτων	Σφουγγάρι Menger (κωδικός Λδ)
9	9	9	χ=1,269	12	8

Πίνακας 10θ: Γραμμή von Koch και τελική ταξινόμηση

Υπήρξε μια σχετική δυσκολία μόνο στον σχεδιασμό των επαναλήψεων της γραμμής von Koch (3 ομάδες απέτυχαν), αντίθετα με τη γραμμή Cantor δεν υπήρξε πρόβλημα. 4 ομάδες δεν ταξινόμησαν σωστά το σφουγγάρι Menger.

10. Γ1 πειραματικού γυμνασίου παν. Μακεδονίας (ομάδες 9), 2008.

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων Cantor	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Διαδικασία Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
9	9	9	χ=0,62	*Μένουν βουλίτσες, τελίτσες, σκόνη. Άπειρες τελίτσες*	*Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα από την αρχή*

Πίνακας 9ι: Σκόνη Cantor

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Ταξινόμηση γνωστών σχημάτων	Σφουγγάρι Menger
6	6	9	χ=1,27	8	6

Πίνακας 10ι: Γραμμή von Koch και τελική ταξινόμηση

Υπήρξε ξανά σχετική δυσκολία στον σχεδιασμό των επαναλήψεων von Koch, 3 ομάδες δεν ταξινόμησαν σωστά το σφουγγάρι Menger.

11. 2ο γυμνάσιο Μίκρας Γ1 (11 ομάδες), 2008

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων Cantor	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Διαδικασία Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
11	11	11	χ=0,621	*Μόρια σημεία , σκόνη, Άπειρες βουλίτσες τελίτσες Σημεία ή μικροσκοπικές γραμμές*	*α. Είναι το μοναδικό που η διάσταση είναι ανάμεσα στο 0 και στο 1 β. Διαφέρει επειδή η τιμή της διάστασης είναι 0<χ<1 επειδή σχηματίζονται λιγότερα ιδία κομμάτια*

Πίνακας 9κ: Σκόνη Cantor

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Ταξινόμηση γνωστών σχημάτων	Σφουγγάρι Menger
10	8	10	χ=1,265	9	8

Πίνακας 10κ: Γραμμή von Koch και τελική ταξινόμηση

Όλες οι ομάδες διαπίστωσαν άνετα και σωστά τη διαδικασία (αλγόριθμο) και διατύπωσαν την εξίσωση διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής Cantor. Πολλές καταγραφές αιτιολογούν το 0<χ<1 της διάστασής της με πιο ενδιαφέρουσα ίσως:

Διαφέρει η τιμή της διάστασης, είναι 0<χ<1 επειδή σχηματίζονται λιγότερα ίδια κομμάτια,

ένδειξη κατανόησης της όλης διαδικασίας εύρεσης διάστασης αυτοομοιότητας. Ωστόσο δυο ομάδες απέτυχαν στην ταξινόμηση και τρεις ομάδες δεν ταξινόμησαν το σφουγγάρι Menger σωστά.

12. Πειραματικό γυμνάσιο παν. Μακεδονίας Γ1 (6 ομάδες), 2009

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων Cantor	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Διαδικασία Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
6	6	6	χ=0,6	*Σκόνη. Άπειρες βουλίτσες .*	*α Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα κατά 1/3. β Επειδή 3>2*

Πίνακας 9λ: Σκόνη Cantor

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Ταξινόμηση γνωστών σχημάτων	Σφουγγάρι Menger
4	4	6	χ=1,27	5	5

Πίνακας 10λ: Γραμμή von Koch και τελική ταξινόμηση

Σχεδόν όλες οι ομάδες ταξινόμησαν σωστά το σφουγγάρι Menger.

13. Πειραματικό γυμνάσιο παν. Μακεδονίας Γ2 (6 ομάδες), 2009

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων Cantor	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Διαδικασία Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
6	6	6	χ=0,621	*Άπειρη σκόνη.*	*Επειδή είναι το μόνο που αρχίζει από 0.6….*

Πίνακας 9μ: Σκόνη Cantor

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Ταξινόμηση γνωστών σχημάτων	Σφουγγάρι Menger
5	5	6	χ=1,265	6	6

Πίνακας 10μ: Γραμμή von Koch και τελική ταξινόμηση

Όλες οι ομάδες ταξινόμησαν σωστά το σφουγγάρι Menger.

14. 1ο γυμνάσιο Μίκρας Γ3 (9 ομάδες), 2009

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων Cantor	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Διαδικασία Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
9	9	9	χ=0,621	*Άπειρες μικρές γραμμές Θα μείνει σκόνη , κουαρκ*	*α. Η διάσταση είναι κάτω από 1 επειδή παίρνουμε λιγότερα κομμάτια β. Η διάσταση είναι 0<χ<1 επειδή τα κομμάτια γίνονται λιγότερα από τα αρχικά*

Πίνακας 9ν: Σκόνη Cantor

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Ταξινόμηση γνωστών σχημάτων	Σφουγγάρι Menger
8	6	6	χ=1,265	7	7

Πίνακας 10ν: Γραμμή von Koch και τελική ταξινόμηση

Όλες οι ομάδες διαπίστωσαν σωστά τη διαδικασία και διατύπωσαν σωστά την εξίσωση διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής Cantor χωρίς δυσκολία. Σχεδόν όλες οι ομάδες (7/9) ταξινόμησαν τα σχήματα και το σφουγγάρι Menger σωστά.

15. 5^{o} γυμνάσιο Βόλου Γ1 (12 ομάδες), 2009

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων Cantor	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Διαδικασία Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
12	11	11	χ=0,663	*Κουκίδες , σκόνη, Άπειρες τελίτσες*	*α. Επειδή από τα 3 κομμάτια σχηματίστηκαν 2 ίδια β. Διαφέρει επειδή τα κομμάτια έγιναν λιγότερα (2)*

					και έγινε 0,6..

Πίνακας 9ξ: Σκόνη Cantor

Σχεδίαση 2 επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας	Σχηματισμός της εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης αυτοομοιότητας	Ταξινόμηση γνωστών σχημάτων	Σφουγγάρι Menger
11	10	10	χ=1,26	10	10

Πίνακας 10ξ: Γραμμή von Koch, ταξινόμηση

Στη δραστηριότητα πολλές καταγραφές (7/12) αιτιολογούν το 0<χ<1 της γραμμής Cantor ως εξής:

Επειδή από τα 3 κομμάτια σχηματίστηκαν 2 ίδια.

Οι καταγραφές αυτές είναι πολύ ισχυρή ένδειξη κατανόησης της όλης διαδικασίας εύρεσης διάστασης αυτοομοιότητας. Δυο ομάδες απέτυχαν στην ταξινόμηση γενικά, καθώς και στο σφουγγάρι Menger.

Είναι φανερό, ότι με τη νέα δραστηριότητα Ε η κατανόηση της άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας και ο σωστός υπολογισμός της αυξήθηκαν σημαντικά σε όλα τα γυμνάσια των ετών 2008 και 2009. Περαιτέρω συγκεντρωτική ανάλυση των αποτελεσμάτων καθώς και η επιλογή της τελικής πρότασης ακολουθεί στα επόμενα δυο κεφάλαια.

ΚΕΦ. IX
Θεμελιωμένη Θεωρία.
Τρίτο μέρος:
Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

3ο στάδιο: Ανάλυση τύπου επιλεκτικής κωδικοποίηση (selective coding).

Στο τρίτο και τελευταίο στάδιο ανάλυσης τύπου θεμελιωμένης θεωρίας γίνεται επιλογή των δεδομένων (κωδικών) που θα στηρίξουν την κεντρική ιδέα (core) της προς ανάπτυξη θεωρίας. Το τέλος της ανάλυσης των δεδομένων διαφαίνεται όταν παρουσιαστεί θεωρητικός κορεσμός *(theoretical saturation,* Jonson B, Christensen L, 2008), δηλαδή όταν καμία νέα πληροφορία και καμία βελτίωση της κεντρικής ιδέας δεν αναδύεται πλέον από την επεξεργασία των δεδομένων. Στην περίπτωσή μας και μετά την κατηγοριοποίηση της προηγούμενης ενότητας, τα αποτελέσματα όλων των γυμνασίων συνολικά ανά δραστηριότητα, και η επιτυχία ή όχι των γνωστικών στόχων αναλύονται διεξοδικά στην ενότητα αυτή. Η ανάλυση θα αναδείξει την τελική μας πρόταση, καθώς και τους κωδικούς που θα συμπεριληφθούν ή όχι σε αυτήν με σχετική επεξήγηση. Τα αποτελέσματα παρατίθενται σε τελικούς συγκεντρωτικούς πίνακες (πίνακας Γ1 έως πίνακας Γ9). Η στατιστική επεξεργασία των συγκεντρωτικών δεδομένων των πινάκων αυτών γίνεται εμφανής σε διαγράμματα που ακολουθούν και αντιστοιχούν στον κάθε παραπάνω πίνακα (Χατζηπαντελής, Θ. 1998), και αριθμούνται με τον ίδιο τρόπο (διάγραμμα Γ1 έως διάγραμμα Γ9). Τέλος τεκμηριώνεται ο θεωρητικός κορεσμός (theoretical saturation) σε κάθε δραστηριότητα χωριστά στην ανάλυσής μας. Στο σύνολο της πρότασης ο θεωρητικός κορεσμός αναφέρεται στην αρχή του επόμενου κεφαλαίου Χ όπου παρατίθεται ολοκληρωμένα η τελική μας πρόταση.

3.1 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα δραστηριότητας Α : Παιχνίδι του χάους

Τα αποτελέσματα της δραστηριότητας Α όλων των γυμνασίων συνολικά παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

Γυμν. Ομάδ.	7^o Β 7	Περ 6	5^o Κ. 10	7^o Κ 7	6^o Κ 9	3^o Κ 13	4^o Κ 11	Επ 9	Π γ2 12	Π γ1 9	2^o Μ 11	Π γ2 6	Π γ1 6	1^o Μ 9	5^o Β 12
Δ. Π. %	4 57	3 50	8 80	5 71	6 67	4 31	-	-	5 42	5 55	5 45	2 33	2 33	3 33	8 67
Κουκίδες σκόρπιες	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	Ν	Ν			ΟΧΙ	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	ΟΧΙ
Δ. δομής	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	Ν	Ν			Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	ΝΑΙ
Αιτ. α	5	3	5	4	6	8			5	3	3	3	1	3	5
Αιτ. β	1	-	-	2	-	-			3	1	5	-	1	3	5
Συν. %	6 85,7	3 50	5 50	6 85,7	6 67	8 67,7			8 67	4 44	8 72,7	3 50	2 33	6 67	10 83,3
Έτος	2006			2007					2008			2009			

Πίνακας Γ1: Συνολική παρουσίαση της δραστηριότητας Α

Στην πρώτη γραμμή σημειώνονται τα γυμνάσια με τη σειρά των παρεμβάσεων (π.χ. 7^o Β=7^o γυμνάσιο Βόλου), καθώς και ο αριθμός των ομάδων εργασίας των μαθητών (ομαδ. 7). Στη δεύτερη γραμμή σημειώνεται σε αριθμό καταγραφών ομάδων και ποσοστό καταγραφών η **δυνατότητα πρόβλεψης** (Δ.Π.) **πριν** την εκτέλεση του παιχνιδιού. Στη συνέχεια ο χαρακτηρισμός των κουκίδων κατά την εκτέλεση του παιχνιδιού συνοπτικά (σκόρπιες ΝΑΙ ή ΟΧΙ) και η διαπίστωση της εσωτερικής δομής (Δ. δομής ΝΑΙ ή ΟΧΙ) μετά την εκτέλεση στη τρίτη και τέταρτη γραμμή αντίστοιχα γραμμή. Η αιτιολόγηση της εμφάνισης του τριγώνου Sierpinski με βάση α. **σταθερές παραμέτρους στο παιχνίδι** ή β. **περιοχές συγκέντρωσης, σημείων έλξης μέσα στο τρίγωνο**, καθώς και ο συνολικός αριθμός αιτιολογήσεων αυτών στην πέμπτη (Αιτ. α), έκτη (Αιτ. β), και έβδομη γραμμή (Συν. %) αντίστοιχα. Στην όγδοη γραμμή σημειώνεται το έτος που πραγματοποιήθηκε η κάθε παρέμβαση.

Από τον πίνακα διαπιστώνεται ότι:

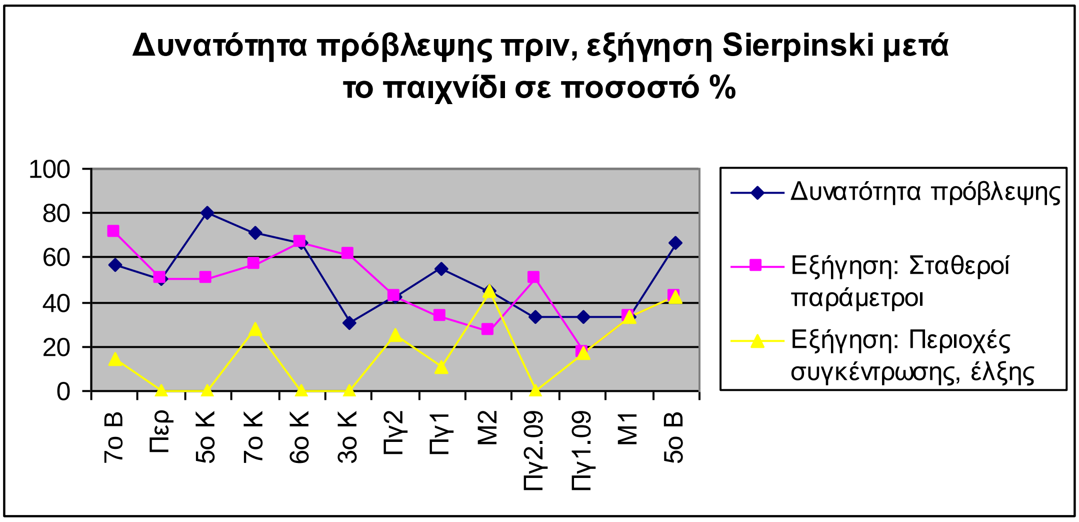
1. Ανεξάρτητα από τις αρχικές καταγραφές πριν το παιχνίδι των μαθητών για τη δυνατότητα πρόβλεψης ή όχι, όλες οι ομάδες μαθητών σε όλα τα γυμνάσια, συμμετέχοντας οι ίδιοι στην εξέλιξη του παιχνιδιού, διαπίστωσαν κατά την εξέλιξή του ότι οι κουκίδες τους είναι *σκόρπιες ή τυχαίες ή διάσπαρτες* κ.λπ.

Σε δυο μόνο γυμνάσια Π.Γ.Π.Μ. Γ2 2008 και 5^{ο} γυμνάσιο Βόλου 2009 διαπίστωσαν οι μαθητές για τις κουκίδες τους ότι φαίνονται συγκεντρωμένες σε διαφορετικές περιοχές. Πιθανόν αυτή η διαφοροποίηση να οφείλεται στον μεγάλο αριθμό ομάδων των συγκεκριμένων γυμνασίων (12 ομάδες δηλαδή από 24 τουλάχιστον μαθητές ανά τάξη, που έδωσαν πάνω από 480 κουκίδες στις διαφάνειες), καθώς και στη σχολαστικότερη εκτέλεση του παιχνιδιού. Τα παραπάνω άφησαν να διαφανεί πρώιμα το αποτέλεσμα πριν την τελική προβολή όπως προαναφέρθηκε.

2. Η διαπίστωση της εμφάνισης του τριγώνου Sierpinski στη συνέχεια υπήρξε καθολική (108 στις 109 ομάδες).

Για τους παραπάνω λόγους θεωρούμε ότι η γνωστική σύγκρουση διαπιστώθηκε στο σύνολο των καταγραφών των μαθητών, και ότι οι γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας όπως παρουσιάστηκαν στην ενότητα VII 2, πέτυχαν στον μέγιστο δυνατό βαθμό.

Οι εξηγήσεις των μαθητών για την εμφάνιση του Sierpinski εμφανίζονται συνοπτικά στο επόμενο γράφημα:



Διάγραμμα Γ1: Δυνατότητα πρόβλεψης πριν, και εξήγηση μετά το παιχνίδι στις δυο κύριες αιτιολογήσεις.

Οι εξηγήσεις του αποτελέσματος με αναζήτηση σταθερών παραμέτρων στο παιχνίδι (ροζ γραμμή) υπερτερεί των υπόλοιπων καταγραφών, και αντιπροσωπεύει περίπου 55% των απαντήσεων των μαθητών. Οι εξηγήσεις με βάση περιοχές συγκέντρωσης ή σημείων έλξης (κίτρινη γραμμή) είναι λιγότερες (με εξαίρεση το 2ο γυμνάσιο Μίκρας).

Ενδεικτικά: *Δεν ήταν πραγματικά τυχαίο, υπάρχουν περιοχές που τραβάνε τα σημεία και έχουμε επαναλαμβανόμενα όμοια τρίγωνα.*

Τέτοιου είδους απαντήσεις αντιπροσωπεύουν το 15% περίπου των καταγραφών συνολικά (βλ. διάγραμμα Γ1). Η διαφορά φαίνεται να μειώνεται με την πρόοδο των παρεμβάσεων ειδικά το τελευταίο έτος 2009. Αθροιστικά οι σωστές αιτιολογήσεις παραμένουν περίπου στο 70% σταθερά σε όλες τις παρεμβάσεις, ποσοστό που δε βελτιώνεται χρονολογικά.

Ο θεωρητικός κορεσμός στο σημείο αυτό φαίνεται να έχει επέλθει, και βελτίωση της δραστηριότητας για πληρέστερη επιτυχία των γνωστικών στόχων δε φαίνεται δυνατή.

Η δραστηριότητα Α αποτελεί σημαντικό μέρος της κεντρικής ιδέας της τελικής μας πρότασης (κεφάλαιο Χ).

3.1.1 Επιλογή κωδικών Α, Β (δυνατότητα πρόβλεψης ή όχι) για να συμπεριληφθούν στην τελική πρόταση.

Στη δραστηριότητα Α είναι απαραίτητο να γνωρίσουν οι μαθητές το τρίγωνο Sierpinski, για να μπορέσουν να αναγνωρίσουν το τελικό αποτέλεσμα στις διαφάνειες. Για τον λόγο αυτό η δραστηριότητα με το τρίγωνο Sierpinski προηγήθηκε της δραστηριότητας με το παιχνίδι του χάους στα πρώτα γυμνάσια (τα έτη 2006, 2007). Συγκεκριμένα κατά την έρευνα μας σε 8 γυμνάσια μεταξύ 2006 και 2007 εμφανίστηκαν συνολικά 52 (Α+Β+Άλλο) σχετικές καταγραφές:

Α Δυνατότητας πρόβλεψης γενικά	Α1 Δυνατότητας πρόβλεψης τριγώνου	Β Αδύνατη πρόβλεψη	Άλλο
30 ομάδες	10 ομάδες	19 ομάδες	3 ομάδες

Πίνακας Γ. 1.α Δυνατότητα πρόβλεψης , καταγραφές των ετών 2006 και 2007

Στον παραπάνω πίνακα η δυνατότητα πρόβλεψης συνολικά είναι στο σχετικά υψηλό ποσοστό 57,6% των καταγραφών και η αδυναμία πρόβλεψης στο σχετικά χαμηλό 36,5%. Αυτό έγινε ιδιαίτερα εμφανές στο 5^{ο} γυμνάσιο Καλαμαριάς που εμφανίζει το μέγιστο από όλα τα γυμνάσια ποσοστό 80% στις καταγραφές αποδοχής δυνατότητας πρόβλεψης (βλ. πίνακα Γ1).

Στα γυμνάσια μετά το 2008 ξεκινούσαμε την παρέμβαση με το παιχνίδι του χάους και οι μαθητές κατέγραφαν την άποψη τους χωρίς να έχουν υπόψη τους το τρίγωνο Sierpinski ή οποιοδήποτε προηγούμενο ερέθισμα. Μετά την εκτέλεση του παιχνιδιού γινόταν διακοπή της δραστηριότητας Α, ακολουθούσε παρουσίαση του τριγώνου Sierpinski (η δραστηριότητα Β είναι απαραίτητη για την αναγνώριση της εσωτερικής δομής του παιχνιδιού) και κατόπιν γινόταν η παρουσίαση των διαφανειών του παιχνιδιού στο τέλος της δραστηριότητας Α.

Στα γυμνάσια των ετών 2008 και 2009 που πραγματοποιήθηκε με τον παραπάνω τρόπο η παρέμβαση, τα αποτελέσματα των καταγραφών 58 ομάδων ήταν:

Α Δυνατότητας πρόβλεψης γενικά	Α1 Δυνατότητας πρόβλεψης τριγώνου	Β Αδύνατη πρόβλεψη	Άλλο
30 ομάδες	22 ομάδες	23 ομάδες	5 ομάδες

Πίνακας Γ. 1.β Δυνατότητα πρόβλεψης , καταγραφές των ετών 2008 και 2009

Στον πίνακα η δυνατότητα πρόβλεψης είναι στο 51,7% των καταγραφών και η αδυναμία πρόβλεψης στο 37,9%, φέροντας τις δυο αντιλήψεις πιο κοντά στον δυισμό των αντιλήψεων που αναφέρεται στη βιβλιογραφία (κεφάλαιο VII. 1.1 και 1.2, κωδικοί Α και Β).

Στην τελική πρότασή μας η σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων είναι αυτή των παρεμβάσεων των ετών 2008 και 2009 (κεφάλαιο Χ. 1, 2).

3.2 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα δραστηριότητας Β: Τρίγωνο Sierpinski

Τα αποτελέσματα της δραστηριότητας Β κατά την εκτέλεση επαναλήψεων Sierpinski όλων των γυμνασίων συνολικά παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

Γυμν. Ομάδ.	7ο Β 7	Περ 6	5ο Κ. 10	7ο Κ 7	6ο Κ 9	3ο Κ 13	4ο Κ 11	Επ 9	Π γ2 12	Π γ1 9	Μ2 11	Π γ2 6	Π γ1 6	Μ1 9	5ο Β 12
Sierp. %	5 71	5 83	10 100	7 100	6 100	13 100	11 100	9 100	12 100	9 100	11 100	6 100	6 100	9 100	12 100
Επαν.	5	4	8	7	7	10	8	8	12	5	11	5	5	8	5
Αυτ.	3	2	1	4	4	2	2	1	7	3	8	3	3	7	1
Ε.+Α	2	-	1	4	4	1	1	-	7	3	9	3	3	7	2
Γεν.	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	1	1	5
Έτος	2006			2007					2008			2009			

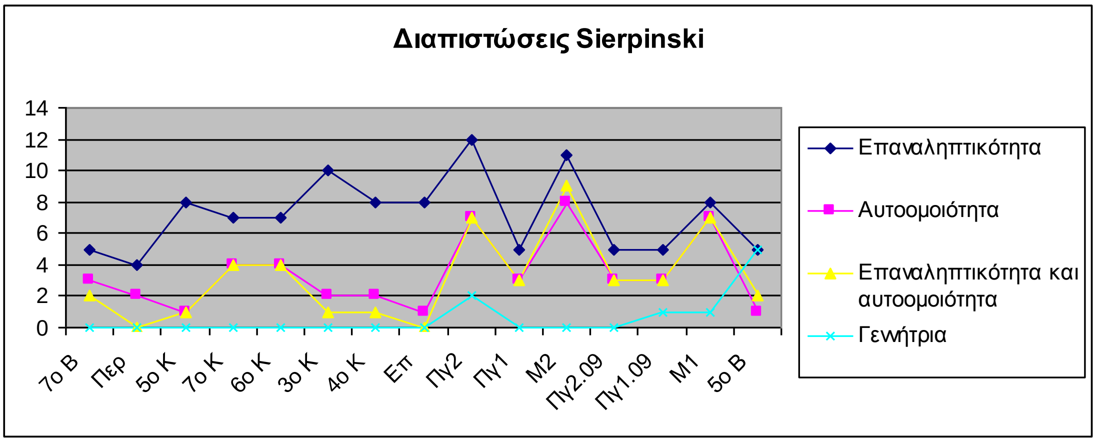
Πίνακας Γ2: Σχεδιασμός και διαπιστώσεις Sierpinski

Στη γραμμή 2 του πίνακα αναγράφονται οι ομάδες και το ποσοστό ομάδων ανά γυμνάσιο που σχεδίασαν σωστά τις επόμενες επαναλήψεις του Sierpinski. Από τις 137 ομάδες συνολικά οι 134 σχεδίασαν σωστά τις δυο επόμενες ή και περισσότερες επαναλήψεις του Sierpinksi. Στα πρώτα δυο γυμνάσια τρεις ομάδες απέτυχαν στη σχεδίαση, στα υπόλοιπα γυμνάσια η σωστή σχεδίαση είναι σταθερά στο σύνολο (100% βλ πίνακα Γ2) των ομάδων. Στις επόμενες 3 γραμμές αναγράφονται οι διαπιστώσεις των μαθητών κατά τον σχεδιασμό του Sierpinski. Στη γραμμή 3 του πίνακα αναγράφονται όσες ομάδες κατά διαπιστώσεις της διαδικασίας αναφέρονται **σε επαναληπτικότητα**, στη γραμμή 4 σε **αυτοομοιότητα**, στη γραμμή 5 σε **επαναληπτικότητα και σε αυτοομοιότητα** μαζί και στη γραμμή 6 σε **γεννήτρια** σχήματος.

Οι παραπάνω καταγραφές δεν μπορούν να αθροιστούν γιατί πολλές φορές επικαλύπτονται περισσότερες αναφορές μαζί, ενδεικτικά:

Σχηματίζονται άπειρα όμοια τρίγωνα τα οποία σταδιακά συρρικνώνονται.

Οι διαπιστώσεις των μαθητών συμπεριλαμβάνουν γενικά την αυτοομοιότητα και τη συνεχή επανάληψη, γι' αυτό και η τέταρτη και πέμπτη γραμμή στον πίνακα και στο διάγραμμα Γ2 (ροζ και κίτρινη γραμμή) σχεδόν ταυτίζονται. Το δεδομένο αυτό συμφωνεί με τη θεωρία, όπου ο ορισμός της αυτοομοιότητας συμπεριλαμβάνει την επαναληπτικότητα (κεφάλαιο VII 1.5).



Διάγραμμα Γ2: Διαπιστώσεις των μαθητών κατά τον σχεδιασμό επαναλήψεων Sierpinski

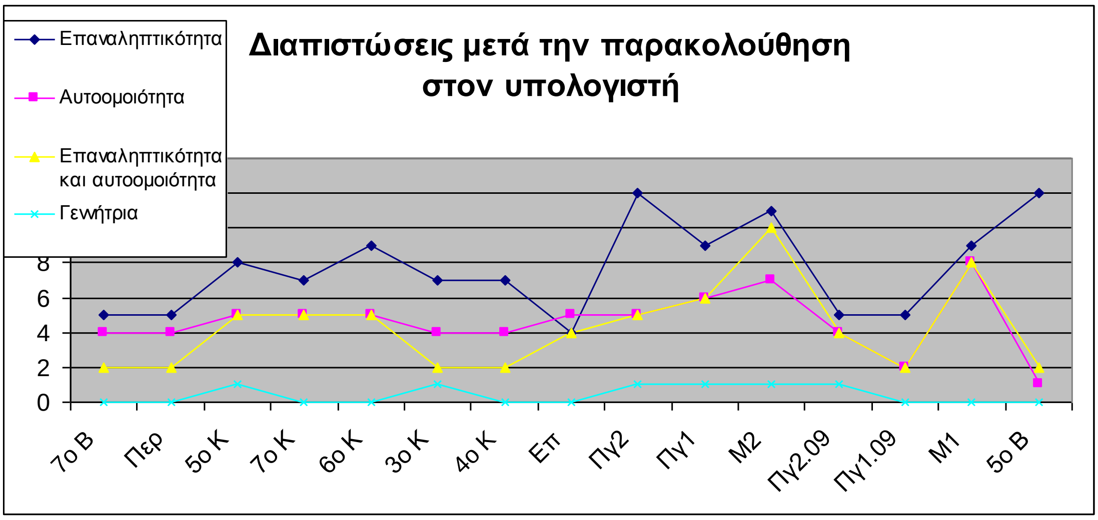
Οι βασικοί στόχοι της δραστηριότητας, η διαπίστωση δηλαδή της αυτοομοιότητας και της επαναληπτικότητας του Sierpinski, αναφέρονται σε 51 και σε 108 καταγραφές ομάδων μαθητών αντίστοιχα. Η πλειοψηφία των καταγραφών επαναληπτικότητας (57 καταγραφές) στη γραμμή 3 του πίνακα Γ2 αναφέρονται σε *χωρίς τέλος* ή *άπειρη διαδικασία* (κεφάλαιο VII 1.3, κωδικός Γ: άπειρο).

Στην γραμμή 6 του πίνακα Γ2 (γεννήτρια) σημειώθηκαν καταγραφές που αναφέρονται ρητά σε δημιουργία του σχήματος από το αρχικό, αλλά οι καταγραφές είναι ελάχιστες. Μόνο 9 καταγραφές υπάρχουν, οι 5 από αυτές είναι όμως από το ίδιο γυμνάσιο, το 5^{ο} γυμνάσιο Βόλου.

Τα αποτελέσματα της δραστηριότητας Β μετά την παρακολούθηση των επαναλήψεων από υπολογιστή όλων των γυμνασίων συνολικά, παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα και διάγραμμα Γ3:

Γυμν. Ομάδ.	7^{ο} Β 7	Περ. 6	5^{ο} Κ. 10	7^{ο} Κ 7	6^{ο} Κ 9	3^{ο} Κ 13	4^{ο} Κ 11	Επ 9	Π γ2 12	Π Γ1 9	Μ2 11	Π γ2 6	Π γ1 6	Μ1 9	5^{ο} Β 12
Επαν.	5	5	8	7	9	7	7	4	12	9	11	5	5	9	12
Αυτ.	4	4	5	5	5	4	4	5	5	6	7	4	2	8	1
Ε. +Α	2	2	5	5	5	2	2	4	5	6	10	4	2	8	2
Γεννήτριας.	-	-	1	-	-	1	-	-	1	1	1	1	-	-	-
Έτος	2006			2007					2008			2009			

Πίνακας Γ3: Διαπιστώσεις Sierpinski μετά την παρακολούθηση στον υπολογιστή



Διάγραμμα Γ3: Διαπιστώσεις Sierpinski μετά την παρακολούθηση στον υπολογιστή

Οι πίνακες και τα διαγράμματα Γ2 και Γ3 αναφέρονται στις καταγραφές **πριν** και **μετά** την παρακολούθηση των επαναλήψεων του Sierpinski στον υπολογιστή αντίστοιχα. Μετά την παρατήρηση στον υπολογιστή οι καταγραφές που αφορούν την επαναληπτικότητα αυξήθηκαν ελαφρά σε 115, περιλαμβάνοντας όμως 69 καταγραφές που αφορούν ειδικότερα την αυτοομοιότητα, αναλογικά πολύ περισσότερες σε σχέση με τις αντίστοιχες καταγραφές πριν την παρατήρηση (βλ. πιν. Γ2). Ακόμη οι ελάχιστες (μόνο 6) καταγραφές γεννήτριας δεν αυξήθηκαν, φαίνεται όμως να μοιράζονται πιο ομοιόμορφα στα γυμνάσια. Γενικά όπως φαίνεται στο διάγραμμα Γ3, οι γραμμές των διαφορετικών διαπιστώσεων είναι ελαφρά αυξημένες όλες σε σχέση με τον πίνακα και το διάγραμμα Γ2, και φαίνεται να κατανέμονται πιο ομοιόμορφα και να έρχονται πιο κοντά μεταξύ τους. Η διαφορά των αντίστοιχων καταγραφών του πίνακα Γ3 σε σχέση με τις καταγραφές πριν την παρατήρηση στον υπολογιστή του πίνακα Γ2 και του διαγράμματος, κυμαίνεται μεταξύ 6% και 17% κατά περίπτωση.

Η διαφορά δεν είναι σημαντική για να τεκμηριώνει κάποιου είδους εννοιολογική αλλαγή όπως συνέβη στη δραστηριότητα Α, αυτό όμως δεν ήταν και ο σκοπός της δραστηριότητα Β. Η παρακολούθηση στον υπολογιστή αφορούσε απλά επιβεβαίωση για τους μαθητές των διαπιστώσεών τους και σύνδεση της νέας τεχνολογίας και των δυνατοτήτων της με τα βασικά χαρακτηριστικά της κλασματοειδούς γεωμετρίας. Ενδεικτικά από καταγραφές μαθητών:

α. *Το αρχικό σχήμα μπορεί να επαναληφθεί αλλά μόνο από τον Η.Υ. χωρίς τέλος.*

β. *Στην οθόνη του υπολογιστή επαναλαμβάνεται αυτό που εμείς κάναμε στο χαρτί άπειρες φορές* καθώς και

γ. *με τον Η.Υ. είναι πιο κατανοητό, γρήγορο και αποτελεσματικό, άλλα είναι το ίδιο πράγμα που κάναμε και μείς.*

Υπάρχουν και άλλα χαρακτηριστικά του τριγώνου Sierpinski που εντοπίστηκαν στη δραστηριότητα Β από τους μαθητές και αφορούν ανεξαρτησία από κλίμακα (scale invariance), τοπολογικά χαρακτηριστικά κ.α., ενδεικτικά: *Επαναλαμβανόμενα μοτίβα τα οποία είναι ίδια αλλά σε διαφορετική κλίμακα .*

Υπάρχει *κάποιο σχήμα που επαναλαμβάνετε πολλές φορές μέχρι να γεμίσει το χώρο, όπως είδαμε στον υπολογιστή.*

Στην γεωμετρία του Ευκλείδη δεν συμβαίνει αυτό.

Οι διαπιστώσεις αυτές αναφέρονται σε σημαντικά θεωρητικά χαρακτηριστικά της νέας γεωμετρίας, αλλά δεν αποτελούν γνωστικούς στόχους μας και δεν κωδικοποιούνται ούτε εξετάζονται περισσότερο στην ανάλυσή μας. Αναφέρονται όμως στο εκάστοτε γυμνάσιο και στους πίνακες της ενότητας που προηγήθηκε (κεφάλαιο VII).

Συνοπτικά ο σχεδιασμός του Sierpinski και οι γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας πραγματοποιήθηκαν σε ποσοστά 70%-100%. Στα αποτελέσματα επήλθε θεωρητικός κορεσμός και δε φαίνεται δυνατό να βελτιωθεί περισσότερο η σχετική δραστηριότητα. Η Δραστηριότητα Β θα περιληφθεί στις κεντρικές της τελικής πρότασης (κεφάλαιο Χ).

3.2.1 Επιλογή κωδικού Γ (άπειρο) για να συμπεριληφθεί στην τελική πρόταση.

Όπως προαναφέρθηκε οι απαντήσεις *άπειρες* στις καταγραφές επαναληπτικότητας αποτελούν την πλειοψηφία των καταγραφών. Στο Γ2 του

Π.Γ.Π.Μ. 2008 μάλιστα σε απόλυτο ποσοστό 100% οι ομάδες κατέγραψαν *άπειρες* στην ερώτηση για το πόσες φορές μπορεί να επαναληφθεί η διαδικασία. Οι απαντήσεις τους είναι σε συμφωνία με τη σχετική βιβλιογραφία για τις αντιλήψεις τους για την έννοια αυτή (κεφάλαιο VII 1.3). Η συχνότητα εμφάνισης της έννοιας παραμένει υψηλή στις δραστηριότητες Γ και Ε και συνδέεται στενά με τη μορφή της τελικής μας πρότασης.

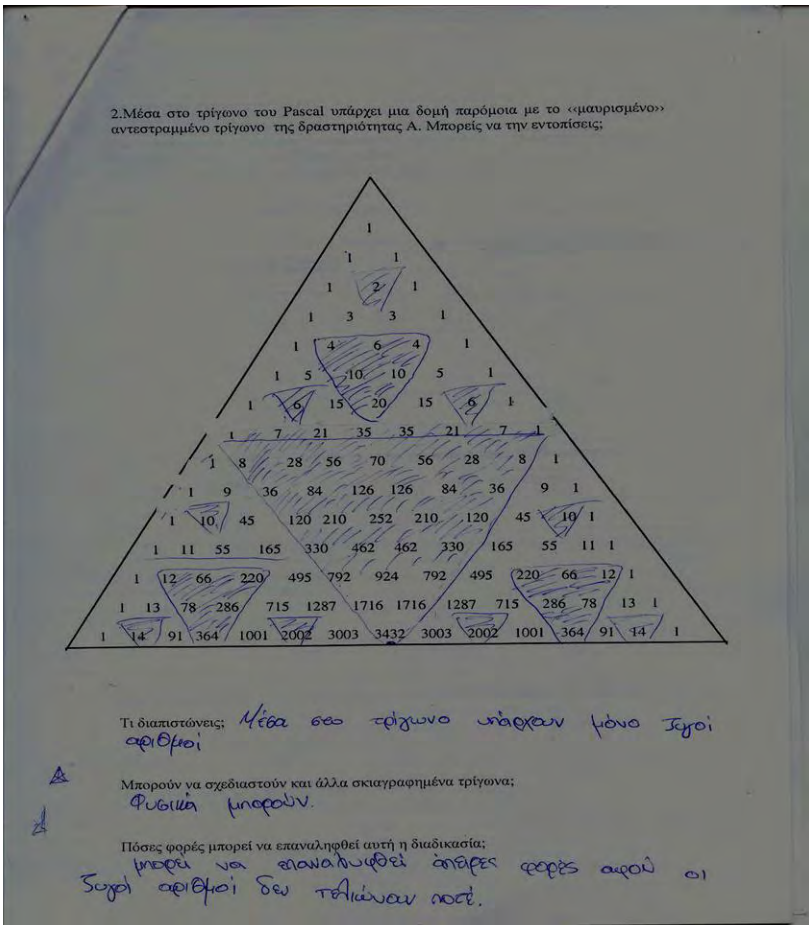
3.2.2 Κωδικοί Α1, ΣΤ (πρόβλεψη τριγώνων) που δεν επιλέχθηκαν για την τελική πρόταση.

Στην αρχή της δραστηριότητα Β ζητούμε από μαθητές να καταγράψουν τα εναπομείναντα τρίγωνα κατά τον σχεδιασμό των πρώτων επαναλήψεων της γεννήτριας Sierpinski. Οι καταγραφές είναι 3 ή 4 τρίγωνα αντίστοιχα, ανάλογα με τις αντιλήψεις των μαθητών που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο VII 1.

Για να αποφευχθεί η σύγχυση αναφέρεται στα φύλλα εργασίας ρητά να καταγράψουν οι μαθητές τα εναπομείναντα *με εσωτερικό* τρίγωνα. Οι μαθητές καταγράφουν αποκλειστικά 3 τρίγωνα. Οι κωδικοί Α1 και ΣΤ ωστόσο δεν αποτελούν γνωστικούς στόχους της παρέμβασης και δε διερευνώνται περισσότερο για την ανάπτυξη της τελικής πρότασης.

3.2.3 Κωδικός Ζ, (τρίγωνο του Pascal) που δεν επιλέχθηκε για την τελική πρόταση.

Το τρίγωνο του Pascal σα συνέχεια της δραστηριότητας Sierpinski εφαρμόστηκε σε 4 γυμνάσια το έτος 2007 σε συνολικά 30 ομάδες και σχεδιάστηκε ικανοποιητικά από 14 ομάδες. Όλες οι παραπάνω ομάδες διαπίστωσαν τον σχηματισμό περιγραμμένων τριγώνων περί των άρτιων (*ζυγών*) αριθμών. Ενδεικτικά:



Εικόνα Γ 1.β: Σχεδιασμός εσωτερικής δομής τριγώνου Pascal από ομάδα μαθητών

Το δεύτερο μέρος της δραστηριότητας Sierpinski δυσκόλεψε σε όλα τα γυμνάσια όπου εφαρμόστηκε τους μαθητές. Διαπιστώθηκε ότι σπάνια γίνεται επεξεργασία του τριγώνου Pascal στο μάθημά τους, ακόμη και σε αυτή την περίπτωση όμως δυσκολεύονται οι μαθητές να εντοπίσουν τα περιγραμμένα τρίγωνα.

Σχεδιασμός δομής Sierpinski	Διαπιστώσεις επαναληπτικότητας	Διαπιστώσεις αυτοομοιότητας	Αιτιολόγηση
14	12	8	12
	Η διαδικασία συνεχίζεται και επικαλύπτονται άπειρες φορές γιατί οι ζυγοί αριθμοί είναι άπειροι.	*Σχηματίζονται όλο και μικρότερα τρίγωνα όμοια με τα προηγούμενα όπως κάναμε και εμεί.*	*α. Μπορούμε να βρούμε άπειρα τρίγωνα β. Θα σχηματιστούν άπειρα τρίγωνα, γιατί οι ζυγοί αριθμοί είναι άπειροι*
46%	40%	26%	40%

Πίνακας Γ1β. Σχεδιασμός δομής Sierpinski μέσα στο τρίγωνο Pascal και αιτιολόγηση

Στη δεύτερη γραμμή του πίνακα Γ 1β αναγράφονται οι ομάδες που σχεδίασαν σωστά τη δομή Sierpinski μέσα στο τρίγωνο Pascal και στη τρίτη γραμμή η αιτιολόγηση. Η διαδικασία ήταν χρονοβόρα (20-30 λεπτά) και το αποτέλεσμα δεν κρίθηκε ποσοτικά ικανοποιητικό για τη διατήρηση στη συνέχεια αυτής της δραστηριότητας. Επιπλέον η μοναδική ομάδα που δεν αναγνώρισε το τρίγωνο Sierpinski στο αποτέλεσμα του παιχνιδιού του χάους (συνέβη στο $3^{ο}$ γυμνάσιο Καλαμαριάς, 2007), κατέγραψε *το τρίγωνο του Pascal,* λόγω παρανόησης που οφείλεται στην παραπάνω δραστηριότητα. Για τους λόγους αυτούς η δραστηριότητα με το τρίγωνο του Pascal αφαιρέθηκε στη συνέχεια από τα φύλλα εργασίας. Αυτό έγινε και για το λόγο ακόμη ότι απαιτούνταν επιπλέον διδακτικός χρόνος για τη συνέχεια της δραστηριότητας Δ κατά τα έτη 2007, 2008, 2009. Ο κωδικός Ζ και η σχετική δραστηριότητα δεν επιλέχθηκαν για την τελική μας πρόταση.

3.3. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα δραστηριότητας Γ: Προσομοιώσεις κλασματοειδών σχημάτων

Στον επόμενο πίνακα Γ4 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι διαπιστώσεις των μαθητών από όλα τα γυμνάσια μετά την παρακολούθηση και άλλων εικόνων και προσομοιώσεων fractal στον υπολογιστή στην αρχή της δραστηριότητας Γ.

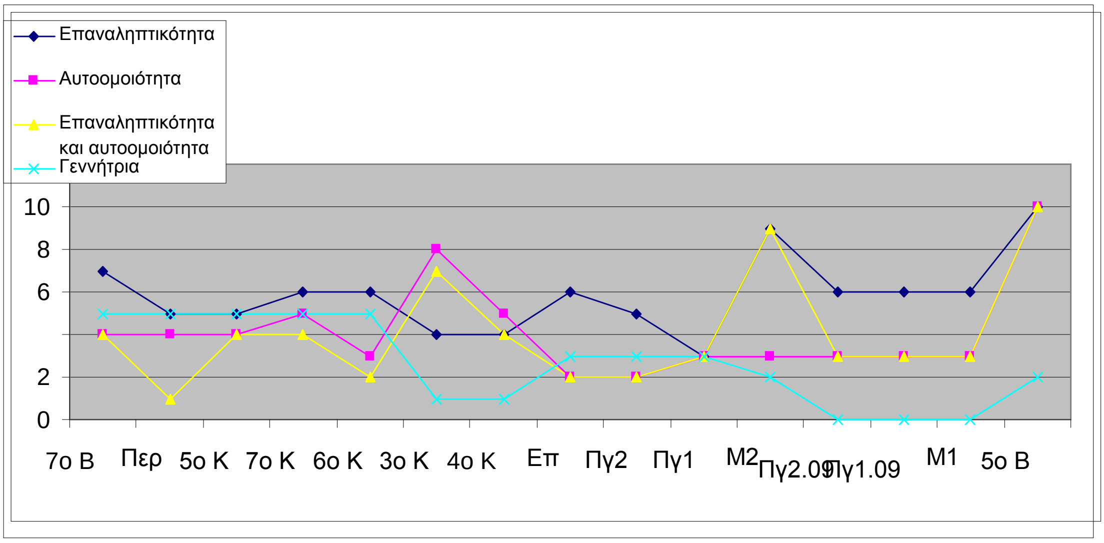
Στην $1^{η}$, $2^{η}$, $3^{η}$, $4^{η}$ και $5^{η}$ γραμμή αναγράφονται τα γυμνάσια και οι ομάδες καθώς και οι διαπιστώσεις που αναφέρονται σε επαναληπτικότητα, σε αυτοομοιότητα, σε επαναληπτικότητα και σε αυτοομοιότητα μαζί και στη γραμμή σε γεννήτρια σχήματος αντίστοιχα. Στην $6^{η}$, $7^{η}$, $8^{η}$ και $9^{η}$ γραμμή σημειώνεται η εικόνα που καθοδήγησε τους μαθητές στις καταγραφές τους, το αν δόθηκε ορισμός των εικόνων, η διατύπωση αυτοομοιότητας και οι εφαρμογές στη φύση από όλη την τάξη με ΝΑΙ ή ΟΧΙ αντίστοιχα .

Γυμν. Ομάδ.	$7^{ο}$ Β 7	Περ. 6	$5^{ο}$ Κ. 10	$7^{ο}$ Κ 7	$6^{ο}$ Κ 9	$3^{ο}$ Κ 13	$4^{ο}$ Κ 11	Επ 9	Π γ2 12	Π Γ1 9	Μ2 11	Π γ2 6	Π γ1 6	Μ1 9	$5^{ο}$ Β 12
Επαν.	7	5	5	6	6	4	4	6	5	3	9	6	6	6	10
Αυτ.	4	4	4	5	3	8	5	2	2	3	3	3	3	3	10
Ε. +Α	4	1	4	4	2	7	4	2	2	3	9	3	3	3	10

Γεννήτριας.	5	5	5	5	5	1	1	3	3	3	2	-	-	-	2
Broc.	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	-	-	-	-	-	-	-
Ον.	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν
Αυτ.	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν
Ε.Φ.	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν	Ν
Έτος	2006			2007					2008			2009			

Πίνακας Γ4: Κοινά χαρακτηριστικά, ονομασία εικόνων, ορισμός αυτοομοιότητας, εφαρμογές στη φύση

Μετά την παρακολούθηση εικόνων και προσομοιώσεων άλλων κλασματοειδών σχημάτων, οι διαπιστώσεις των μαθητών για τα κοινά χαρακτηριστικά τους όπως σημειώνονται στις 4 πρώτες γραμμές του πίνακα Γ4 παρουσιάζονται και στο παρακάτω διάγραμμα:



Διάγραμμα Γ4: Διαπιστώσεις μετά την παρακολούθηση εικόνων και προσομοιώσεων fractal

Συνολικά σημειώθηκαν 88 καταγραφές που διαπίστωναν την επαναληπτικότητα των εικόνων, αλλά σε 61 από αυτές εμφανίζεται τόσο η επαναληπτικότητα όσο και η αυτοομοιότητα. Οι καταγραφές που αφορούν μόνο την αυτοομοιότητα είναι 62, ενώ οι καταγραφές που αφορούν χαρακτηριστικά γεννήτριας είναι 40. Οι καταγραφές της επαναληπτικότητας εξακολουθούν να αποτελούν την πλειοψηφία και αποτελούνται κυρίως από καταγραφές τύπου *άπειρης διαδικασίας*, αλλά περιλαμβάνουν ποσοτικά και ποιοτικά αυξημένες διαπιστώσεις αυτοομοιότητας σε σχέση με τις προηγούμενες δραστηριότητας. Αυτό έγινε ιδιαίτερα εμφανές στο 5ο γυμνάσιο Βόλου, όπου η αυτοομοιότητα των σχημάτων διαπιστώθηκε και αιτιολογήθηκε σε ασυνήθιστα μεγάλο ποσοστό (10/12 ομάδες).

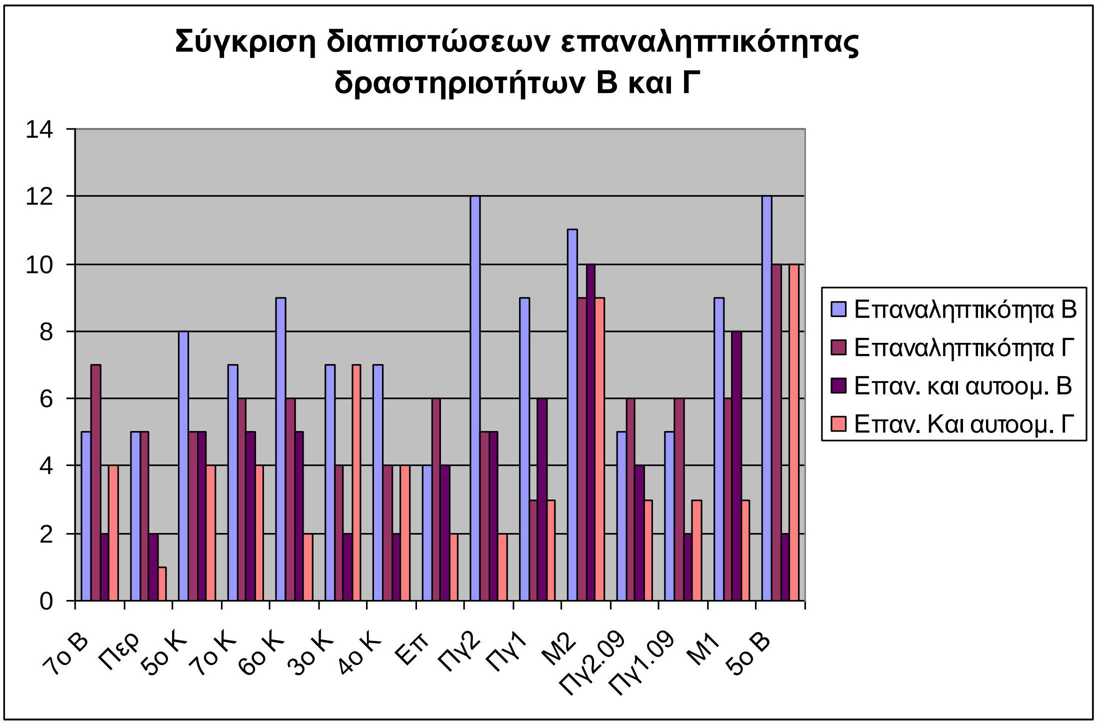
Ενδεικτικά:

Σε ένα τμήμα του σχήματος περιέχονται πολλά όμοια του σε διαφορετικό μέγεθος.

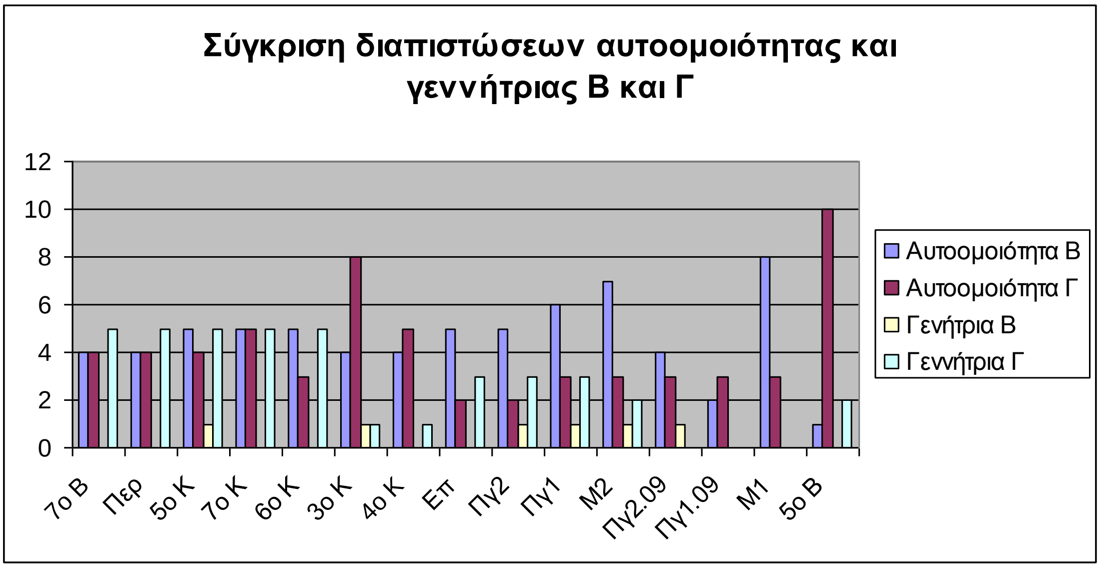
Ακόμη δόθηκε από την τάξη αυτή από κοινού αυτολεξεί ο ορισμός της αυτοομοιότητας και η ονομασία εικόνων (βλ. πίνακα Γ5):

Γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό.

Οι μεταβολές των διαπιστώσεων των μαθητών στη δραστηριότητα Γ (πίνακας Γ4) σε σχέση με την προηγούμενη δραστηριότητα Β (πίνακας Γ3) σε κάθε γυμνάσιο, εμφανίζονται στα πιο κάτω διαγράμματα Γ5 και Γ6:



Διάγραμμα Γ5: Σύγκριση διαπιστώσεων επαναληπτικότητας δραστηριοτήτων Β και Γ



Διάγραμμα Γ6: Σύγκριση διαπιστώσεων αυτοομοιότητας και γεννήτριας δραστηριοτήτων Β και Γ

Σε σχέση με τις καταγραφές στην δραστηριότητα Β, έχουμε μετά την προβολή των προσομοιώσεων στην Γ μείωση των συνολικών καταγραφών αποκλειστικά της επαναληπτικότητας κατά 23%, σημαντική αύξηση όμως των καταγραφών αυτοομοιότητας και κυρίως της γεννήτριας (από 6 σε 40 συνολικά.)

Η παρακολούθηση περισσότερων κλασματοειδών σχημάτων και προσομοιώσεων στον υπολογιστή, έδωσε την ευκαιρία να γενικεύσουν οι μαθητές τη διαδικασία σχηματισμού των σχημάτων αυτών και να αυξηθούν οι καταγραφές γεννήτριας κατά 567%. Για παράδειγμα στο 7^{ο} γυμνάσιο Καλαμαριάς οι καταγραφές αυξήθηκαν από 1/7 σε 5/7 ομάδες.

Ενδεικτικά:

Στα περισσότερα σχήματα υπάρχει ένα κεντρικό σημείο. Από αυτό το σημείο αρχίζει το σχήμα να επαναλαμβάνεται και να μεγεθύνεται φανερώνοντας καλύτερα τα σχήματα.

Η διαπίστωση ότι υπάρχει γεννήτρια (κεφάλαιο VII. 1.8 Κωδικός Θ: Γεννήτρια, Initiator) ήταν ένας γνωστικός στόχος της δραστηριότητας αυτής.

3.3.1 Κωδικός Η (εικόνα που καθοδήγησε), που δεν επιλέχθηκε για την τελική πρόταση.

Η εικόνα που καθοδήγησε τους μαθητές (κωδικός Η) ήταν σε όλα σχεδόν τα γυμνάσια το Broccoli Romanesco, εικόνα στατική αλλά πραγματική. Στα γυμνάσια των ετών 2008 και 2009 ή σχετική ερώτηση έχει αφαιρεθεί, γιατί η επιλογή της ήταν πλέον δεδομένη. Η ερώτηση δε θα περιληφθεί στην τελική πρόταση.

Στον επόμενο πίνακα (Γ5) περιλαμβάνονται οι καταγραφές που αναφέρονται στους υπόλοιπους (πλην γεννήτριας) γνωστικούς στόχους της δραστηριότητας Γ.

Οι καταγραφές εδώ είναι από κοινού μετά από συζήτηση μεταξύ τους όλων των μαθητών της τάξης. Αναμένεται όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα VIII, η ανάδειξη της αυτοομοιότητας μέσα από τους ορισμούς των μαθητών. Επαναλαμβάνουμε ότι η διατύπωση και εξήγηση της λέξης *αυτοομοιότητα* από τους μαθητές δε υποβοηθείται από καμία παρέμβαση του ερευνητή ή καθηγητή.

Γυμνάσιο	Ονομασία εικόνων	Διατύπωση αυτοομοιότητας	Εφαρμογές στη φύση
7ο Β	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα σε τρισδιάστατες εικόνες.*	*Υπάρχει κάποιο σχήμα που επαναλαμβάνεται πολλές φορές μέχρι να γεμίσει το χώρο*	*Κουνουπίδι, έλατο*
Περ	-	-	-
5ο Κ	*Επαναλαμβανόμενες εικόνες*	-	-
7ο Κ	*Ατελείωτες αυτόμοιες εικόνες*	*Όμοιες με τον εαυτό τους*	*Εικόνες βασισμένες στη γεωμετρία στη φύση*
6ο Κ	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Αυτοομοιότητα (όμοια γεωμετρικά σχήματα μέσα στο ίδιο το σχήμα)*	*κουνουπίδι*
3ο Κ	*Βασίζονται σε ένα ομοιόμορφο μοτίβο ή σχήμα*	*ομοιόμορφο μοτίβο*	*Έλατο,* *τυφώνας*
4ο Κ	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Ατελείωτες όμοιες με τον εαυτό τους εικόνες*	*Έλατο*
Επ	*Τάξη στο χάος*	*Ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο*	*Έλατο, κουνουπίδι κ.λπ.*
Πγ2	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	*Έλατο, κουνουπίδι , σύμπαν κ.λπ.*
Πγ1	*Συνεχής αυτοομοιότητα*	*Συνεχής αυτοομοιότητα, όμοια με τον εαυτό τους επαναλαμβανόμενα σχήματα*	*Μαίανδρος, έλατο, κουνουπίδι κ.λπ.*
Μ2	*Επαναλαμβανόμενη ομοιότητα*	*Χωρίς τέλος προέκταση της ομοιότητας*	*Το κουνουπίδι, τα φύλλα κάποιων δέντρων, κύτταρα, νιφάδες χιονιού μικροοργανισμοί*

Πγ2.09	*Εικόνες με όμοιες λεπτομέρειες*	*Σχήματα με όμοιες λεπτομέρειες*	*Μπρόκολο, σταλαγμίτης, κουκουνάρια, δέντρο*
Πγ1.09	*Εικόνες με επαναλαμβανόμενες λεπτομέρειες*	*Όμοιες λεπτομέρειες επαναλαμβάνονται συνεχώς*	*Κουκουνάρια, μπρόκολο, αιμοσφαίρια*
Μ1	*Άπειρα επαναλαμβανόμενες αυτοόμοιες εικόνες*	*Επαναλαμβανόμενες και όμοιες με τον εαυτό τους*	*Έλατο, (γενικά μερικά φυτά), το μπρόκολο, θάμνοι, το κοράλλι*
5ο Β	*Αυτοόμοιες*	*Αυτοόμοιες Ονομάζονται έτσι γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό*	*Το κοράλλι, τα φύλλα δέντρων, κύτταρα, κύματα της θάλασσας κουνουπίδι χόρτο σφουγγάρι*

Πίνακας Γ5. κοινά χαρακτηριστικά εικόνων, ονομασία εικόνων, ορισμός αυτοομοιότητας και εφαρμογές στη φύση από τους μαθητές συνολικά

Στην πρώτη στήλη του πίνακα Γ5 είναι τα γυμνάσια με χρονολογική σειρά. Στη δεύτερη στήλη, είναι οι ονομασίες των εικόνων όλων των μαθητών από κοινού. **Οι ονομασίες ανέδειξαν σχεδόν σε όλα τα γυμνάσια την αυτοομοιότητα σαν κύριο χαρακτηριστικό των εικόνων**. Σε τρία γυμνάσια εμφανιστήκαν ονομασίες του τύπου: *Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*, επηρεασμένες από το παιχνίδι του χάους και ενσωματώνοντας στην ονομασία την επαναληπτικότητα και τη συμμετρία των εικόνων.

Στην τρίτη στήλη, η διατύπωση και εξήγηση της αυτοομοιότητας πραγματοποιήθηκε σχεδόν σε όλα τα γυμνάσια (με την εξαίρεση του Γυμνασίου Περαίας και του 5ου Γυμνασίου Καλαμαριάς), με λόγια των μαθητών που προσεγγίζουν τον θεωρητικό ορισμό της.

Ενδεικτικά:

Αυτοομοιότητα (όμοια γεωμετρικά σχήματα μέσα στο ίδιο το σχήμα).

Σε δύο γυμνάσια διατυπώθηκε η έννοια ως εξής: *Ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο*.

Στη τέταρτη στήλη αναγράφονται οι κύριες εφαρμογές στη φύση της νέας γεωμετρίας που προτάθηκαν από τους μαθητές από κοινού. Η διατύπωση τέτοιων προτάσεων αποτελούσαν γνωστικό στόχο της δραστηριότητας και της όλης της παρέμβασης (κεφάλαιο. III 1. και κεφάλαιο VIII). Μια ενδιαφέρουσα επεξήγηση των καταγραφών εφαρμογών στη φύση από το γυμνάσιο Επανομής ήταν:

Γιατί επαναλαμβάνεται επ άπειρο και σχηματίζει δάση αλλά και γιατί αν το δούμε στο μικροσκόπιο είναι η ίδια πάντα λεπτομέρεια που επαναλαμβάνεται και δίνει τα κλαδιά.

Γενικά από τον παραπάνω συνοπτικό πίνακα Γ5 φαίνεται η επιτυχία των γνωστικών στόχων της δραστηριότητας.

Πιθανώς τα αποτελέσματα της δραστηριότητας Γ να μπορούσαν να βελτιωθούν περισσότερο, π.χ. με παρουσίαση άλλων εικόνων και προσομοιώσεων (παράρτημα Α), ειδικά στον γνωστικό στόχο της γεννήτριας. Οι διαπιστώσεις ύπαρξης γεννήτριας δεν αποτελούν όμως κύριο γνωστικό στόχο της παρέμβασης και τα παραπάνω αποτελέσματα είναι αρκετά στο πλαίσιο αυτό.

3.3.2 Επιλογή κωδικών Δ, Ε, Θ (ιδιότητες επαναληπτικότητας, αυτοομοιότητας, γεννήτριας) για να συμπεριληφθούν στην τελική πρόταση.

Αν και η γεννήτρια αποτελεί επιμέρους γνωστικό στόχο της δραστηριότητας Γ όπως προαναφέρθηκε, η επαναληπτικότητα και κυρίως η αυτοομοιότητα παραμένουν οι κύριοι γνωστικοί στόχοι των δραστηριοτήτων Α, Β, Γ. Η δραστηριότητα Γ έχει τη σημασία της, αλλά κυρίως στοχεύει στη γενίκευση των συμπερασμάτων των προηγούμενων δραστηριοτήτων Α, Β για την αυτοομοιότητα, δραστηριότητες που αποτελούν και τον κορμό της παρέμβασης.

3.4 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα δραστηριότητας Δ: Διάσταση αυτοομοιότητας τριγώνου Sierpinski

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο VIII, στη δραστηριότητα Δ η μαθηματικοποίηση της διάστασης αυτοομοιότητας εφαρμόστηκε σταδιακά στα φύλλα εργασίας των παρεμβάσεων. Από το 2006 μέχρι τα μέσα του 2007 η δραστηριότητα αποσκοπούσε κυρίως στη συλλογή δεδομένων για τη διερεύνηση της πιθανής διδακτικής αξιοποίησης της διάστασης αυτοομοιότητας. Σε συνέχεια της δραστηριότητας αυτής τα έτη 2007, 2008 και 2009 η μαθηματικοποίηση της διάστασης αυτοομοιότητας επιδιώχθηκε συστηματικά και η δραστηριότητα Δ επεκτάθηκε και βελτιώθηκε στην τελική της μορφή.

Στον πίνακα 7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όλων των γυμνασίων και σημειώνονται ως εξής:

Γραμμή 1: Τα γυμνάσια με χρονολογική σειρά παρεμβάσεων και ο αριθμός ομάδων μαθητών στην τάξη.

Γραμμή 2: (Λ. Ο.). Οι ομάδες που πραγματοποίησαν σωστά την εύρεση του λόγου ομοιότητας.

Γραμμή 3: (Δ. Ε.). Οι ομάδες με καταγραφή δεκαδικού (1,5) εκθέτη στον πίνακα λόγου ομοιότητας.

Γραμμή 4: (Διάσταση). Οι καταγραφές των μαθητών σχετικά με δεκαδική διάσταση.

Γυμν. Ομάδ.	7º Β 7	Περ. 6	5º Κ. 10	7º Κ 7	6º Κ 9	3º Κ 13	4º Κ 11	Επ. 9	Π γ2 12	Π Γ1 9	Μ2 11	Π γ2 6	Π γ1 6	Μ1 9	5º Β 12
Λ. Ο.	7		10	7	8	12	10	8	10	9	11	6	6	9	12
Δ. Ε.	4		6	2	6	2	9	2	10	7	8	6	6	8	10
Διάσταση	4		4	2	2	1	2	4	4	2	6	2	3	5	6
Έτος	2006			2007					2008			2009			

Πίνακας Γ6: Εύρεση λόγου ομοιότητας τους μαθητές

Η διαδικασία εύρεσης του λόγου ομοιότητας δεν ήταν πρόβλημα για τους μαθητές, 128 στις 131 ομάδες ανταποκρίθηκαν σωστά. Λιγότερες όμως (86 στις 131) ήταν οι αιτιολογήσεις του δεκαδικού εκθέτη 1,5 με πιο συνηθισμένη: *Επειδή βρίσκεται ανάμεσα στο 2^1 και στο 2^2*.

Η σύνδεση του δεκαδικού εκθέτη με διαστάσεις προβλημάτισε πολύ τους μαθητές. Οι 42 σχετικές καταγραφές ήταν όμως κατά τη γνώμη μας αρκετές και ακόμη ενδιαφέρουσες ως προς τον τρόπο σκέψης των μαθητών για να επιβάλλουν μια ενδεχόμενη συνέχεια της δραστηριότητας με τη δεκαδική διάσταση Sierpinski. Ενδεικτικά:

Οι διαστάσεις μπορεί να είναι ακέραιες ή δεκαδικές, διότι εμπεριέχει την κίνηση και έχει άπειρες επαναλήψεις [Προσθέτοντας]

διότι δεν είμαστε σε θέση να το καταλάβουμε, ή *αφού ο αριθμός των διαστάσεων είναι δεκαδικός χωρίς τέλος, είναι όπως οι επαναλήψεις, είναι άπειρες* ή *οι διαστάσεις του τρίγωνου είναι όσο και το χ δηλαδή 1,5.*

Στο 5^{ο} γυμνάσιο Βόλου έχουμε από την αρχή τις περισσότερες ομάδες (10/12) να σημειώνουν δεκαδικό έκθετη και να τον αιτιολογούν, ακόμη πολλές σχετικά ομάδες (6/12) αποδέχτηκαν ότι μια διάσταση μπορεί να είναι δεκαδικός: *Καινούρια διάσταση προφανώς. Διάσταση αυτοομοιότητας, γιατί είναι σχήμα όμοιο με τον εαυτό του.*

Τα παραπάνω αποτελέσματα τεκμηριώνουν στη Δραστηριότητα Δ τη συνέχεια με τη διάσταση αυτοομοιότητας. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο VII, από το 3^{ο} γυμνάσιο Καλαμαριάς και μετά εφαρμόστηκε δεύτερο και τρίτο μέρος της δραστηριότητας που αφορούσε την εύρεση της διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski. Στον πιο κάτω πίνακα Γ7 εμφανίζονται τα αποτελέσματα του δεύτερου και τρίτου μέρους της δραστηριότητας στα γυμνάσια από το 2007 και μετά.

Γυμν.	3^{ο} Κ	4^{ο} Κ	Επ.	Π γ2	Π Γ1	Μ2	Π γ2	Π γ1	Μ1	5^{ο} Β
Ομάδ.	13	11	9	12	9	11	6	6	9	12
Λ. Ο.	12	10	8	10	9	11	6	6	9	12
Γρ .	8	11	6	10	8	8	6	6	8	10
Δ. Α..	8	8	8	7	7	9	4	3	7	10
Έτος	2007			2008			2009			

Πίνακας Γ7: Λόγος ομοιότητας και σύνδεση με διάσταση Sierpinski

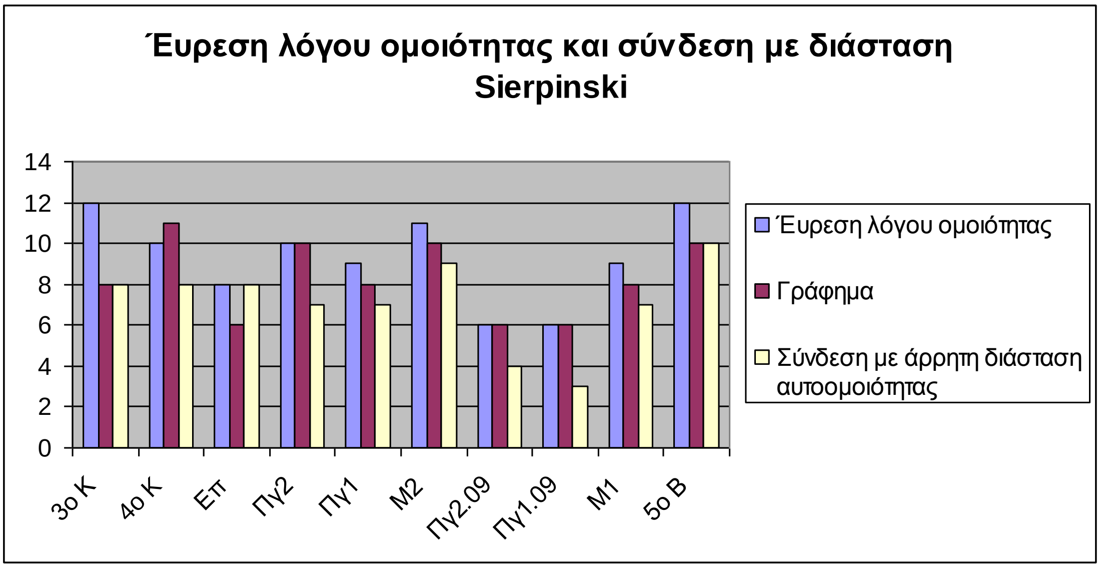
Γραμμή 1: Τα γυμνάσια (π.χ. 3^{ο} Κ= 3^{ο} Γυμνάσιο Καλαμαριάς) με χρονολογική σειρά παρεμβάσεων μετά το 2007 και ο αριθμός ομάδων (Ομαδ.) μαθητών στην τάξη.

Γραμμή 2: Οι ομάδες που πραγματοποίησαν σωστά την εύρεση του λόγου ομοιότητας Λ.Ο (ίδια γραμμή από τον πίνακα Γ6):

Γραμμή 3: Η εύρεση στο γράφημα (Γρ.) του άρρητου εκθέτη από τις ομάδες σωστά.

Γραμμή 4: Η διαπίστωση (Δ.Α.) άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας από τις ομάδες όπως προκύπτει από τις καταγραφές.

Τα αποτελέσματα του πίνακα 7 παρουσιάζονται πιο κάτω στο διάγραμμα 7, όπου οι στήλες με μπλε και κόκκινο χρώμα είναι τα αποτελέσματα της γραμμής 2 και 3 αντίστοιχα. Η κυριότερη όμως στήλη είναι η λευκή, όπου φαίνονται οι ομάδες που κατέγραψαν σύνδεση του λόγου αυτοομοιότητας με την άρρητη διάσταση αυτοομοιότητας, που αποτελούσε και τον κύριο γνωστικό στόχο της δραστηριότητας.

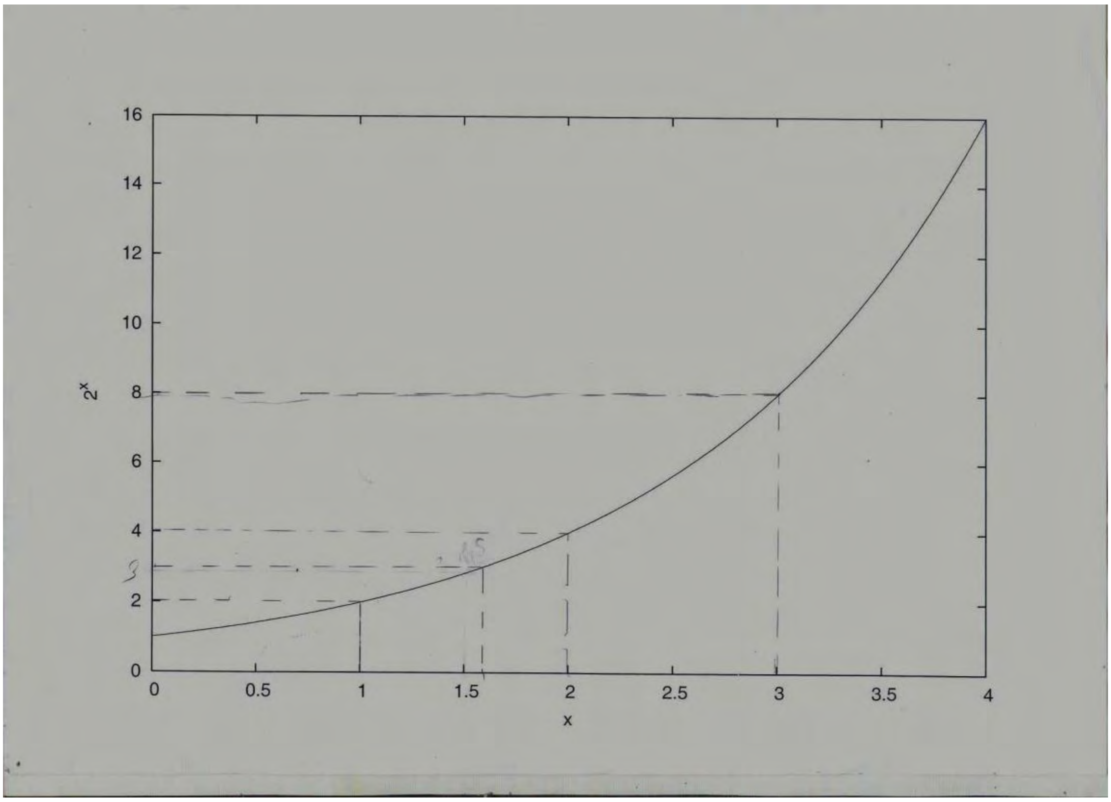


Διάγραμμα Γ7: Λόγος ομοιότητας και σύνδεση με διάσταση Sierpinski

Από τον πίνακα και το διάγραμμα Γ7 είναι φανερό ότι η εύρεση του λόγου αυτομοιότητας δεν είναι πρόβλημα για τους μαθητές (93 στις 98 ομάδες από το 2007 συνολικά, όλες οι ομάδες τα έτη 2008/9), η σύνδεσή του όμως με την άρρητη διάσταση αυτοομοιότητας δεν πραγματοποιήθηκε από όλες τις ομάδες (πραγματοποιήθηκε από 71 στις 98 ομάδες). Οι μαθητές δυσκολεύονται να δεχτούν πως είναι δυνατό να υπάρχει μια δεκαδική διάσταση και μάλιστα άρρητη, σε αντίθεση με όσα είχαν διδαχθεί μέχρι τότε. Αυτό γίνεται αντιληπτό και από πολλές σχετικές καταγραφές, ενδεικτικά:

Δεν μπορούμε να βάλουμε αριθμό διαστάσεων επειδή ο αριθμός που βρήκαμε δεν είναι ακέραιος. Εκτός και αν γίνεται να μπει το 1,59…. άλλα δεν το έχουμε διδαχτεί ή δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δεκαδικές διαστάσεις.

Οι δισταγμοί των μαθητών και οι σχετικές καταγραφές έγιναν λιγότερες μετά την εισαγωγή του γραφήματος στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας Δ, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα VII 1.10 και στο κεφάλαιο VIII.



Γράφημα Γ8: Εύρεση του εκθέτη λόγου αυτομοιότητας από ομάδα μαθητών.

Όπως φαίνεται στον πίνακα και διάγραμμα Γ7, 81 στις 98 ομάδες διαπίστωσαν στο παραπάνω γράφημα σωστά τις συντεταγμένες των διαστάσεων. Μετά το γράφημα οι ομάδες που σύνδεσαν τον δεκαδικό εκθέτη λόγου ομοιότητας με τη διάσταση Sierpinski αυξήθηκαν από 35 σε 71. Αυτό προκύπτει από την απόλυτη σύγκριση των σχετικών καταγραφών των πινάκων Γ6 και Γ7.

Ενδεικτικά:

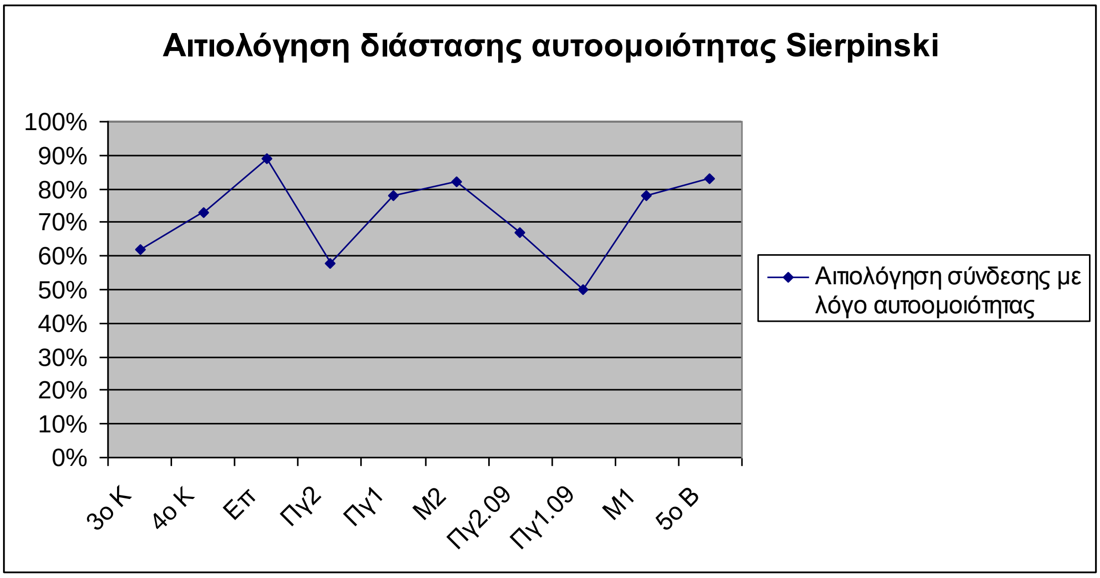
Δεν υπάρχουν μόνο ακέραιες διαστάσεις η διάσταση 1,5.. βρίσκεται ανάμεσα στη διάσταση μήκος και στη διάσταση μήκος και πλάτος ή στη φύση υπάρχουν άπειρες διαστάσεις.

Πιο αναλυτικά, στον επόμενο πίνακα Γ8 σημειώνεται το κάθε γυμνάσιο στη στήλη 1 και η κύρια αιτιολόγηση της σύνδεσής του άρρητου εκθέτη του λόγου αυτοομοιότητας, με τη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski στη στήλη 2. Το συνολικό ποσοστό των ομάδων σε κάθε γυμνάσιο που συνέδεσε τον άρρητο εκθέτη του λόγου αυτοομοιότητας, με τη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski στις στήλες 3 και 4. Η καλύτερη προσέγγιση της διάστασης αυτοομοιότητας του Sierpinski που πραγματοποιήθηκε από την συγκεκριμένη τάξη αναγράφεται στη στήλη. **Το ποσοστό και η αιτιολόγηση της διάστασης αυτοομοιότητας από τους μαθητές που αναγράφονται στις στήλες του πίνακα Γ8, αποτελούν ενδείξεις της επιτυχίας του κύριου γνωστικού στόχου της δραστηριότητας Δ.** Αυτό φαίνεται πιο καθαρά στο διάγραμμα Γ8.

Γυμνάσιο	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Από ομάδες	Ποσοστό	Διάσταση αυτοομοιότητας Sierpinski
3ο Κ	*Το νέο τρίγωνο δεν έχει φυσικούς αριθμούς στις διαστάσεις. Και στις άλλες εικόνες που είδαμε η διάσταση αυτοομοιότητας θα είναι δεκαδικός, άρρητος αριθμός*	8/13	62%	χ=1,5919975
4ο Κ	*Διάσταση δεν μπορεί να είναι μόνο 1, 2, 3 αλλά μεγεθύνοντας ένα σχήμα μπορεί να βρούμε και άρρητες διαστάσεις ανάμεσα. Ένα παράδειγμα: Μια λεπτή γραμμή έχει διάσταση 1 αλλά μπορεί να γίνει και πιο χοντρή και τότε 1 και κάτι, ανάμεσα από το ένα και το δύο*	8/11	73%	χ=1,5807

Επ	*Η διάσταση μπορεί να έχει συγκεκριμένη τιμή, μέτρο. Αλλά μπορεί να είχε την έννοια του άπειρου, της συνοχής*	8/9	89%	χ=1,6
Πγ2	*Οι διαστάσεις μπορεί να είναι ακέραιες ή δεκαδικές, δεν είμαστε σε θέση να το καταλάβουμε διότι εμπεριέχει την κίνηση και έχει άπειρες επαναλήψεις.*	7/12	58%	χ=1,585
Πγ1	*Οι διαστάσεις δεν είναι ακέραιες. Υπάρχει μια συνεχόμενη κίνηση. Υπάρχει αυτοομοιότητα*	7/9	78%	χ=1,585
Μ2	*Επειδή το τρίγωνο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές αλλά ταυτίζεται με το αρχικό είναι άρρητος αριθμός*	9/11	82%	χ=1,585
Πγ2.09	*Γιατί ουσιαστικά είναι το ίδιο με τον εαυτό του με άρρητη διάσταση*	4/6	67%	χ=1,6
Πγ1.09	*Γιατί το τρίγωνο έχει επαναλαμβανομένη αυτοομοιότητα στο άπειρο*	3/6	50%	χ=1,585
Μ1	*Επειδή το τρίγωνου δεν έχει τέλος για αυτό και ο εκθέτης είναι δεκαδικός (άρρητος)*	7/9	78%	χ=1,585
5ο Β	*α. Τα νέα σχήματα είναι όμοια με το αρχικό με άρρητες νέες διαστάσεις* *β. Καινούρια διάσταση προφανώς. Διάσταση αυτοομοιότητας, γιατί είναι σχήμα όμοιο με τον εαυτό του.*	10/12	83%	χ=1,589

Πίνακας Γ8: Σύνδεση και αιτιολόγηση άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας, καθώς και η καλύτερη προσέγγιση της από τους μαθητές



Διάγραμμα Γ8: Ποσοστό αιτιολόγησης άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας Sierpinski

3.4.1. Επιλογή κωδικού I (διάσταση) και κωδικού K (άρρητοι αριθμοί) για να συμπεριληφθούν στην τελική πρόταση.

Σε σχέση με τους γνωστικούς στόχους της δραστηριότητας, η διάσταση του τριγώνου του Sierpinski προσεγγίστηκε πολύ ικανοποιητικά με απόκλιση ακριβείας 0.01 σε όλα σχεδόν τα γυμνάσια. Συνήθως προέκυπτε ανταγωνισμός ανάμεσα στις ομάδες για το καλύτερο αποτέλεσμα.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα Γ8 η καλύτερη αριθμητική προσέγγιση στον υπολογισμό της άρρητης διάστασης Sierpinski, δεν έχει πάντα σχέση με το ποσοστό των ομάδων των μαθητών που την αιτιολόγησαν σωστά.

Οι 71 στις 98 ομάδες αιτιολόγησαν σωστά την σύνδεση αυτή συνδέοντας την με τον λόγο αυτοομοιότητας του τριγώνου, κατανέμονται τελικά σε ποσοστό 50-90% ανά γυμνάσιο (πίνακας και διάγραμμα Γ8).

Τα αποτελέσματα της άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας στις καταγραφές των μαθητών τόσο ποσοτικά όσο και στις αιτιολογήσεις τους όπως προκύπτουν από τα παραπάνω κρίνονται ικανοποιητικά για να συμπεριληφθεί η προσέγγιση της άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας στην τελική μας πρόταση (βλ. κεφ. VIII). Η δε ακρίβεια του υπολογισμού της διάστασης ξεπέρασε κάθε προσδοκία. Η μαθηματικοποίηση της διάστασης του τριγώνου του Sierpinski βελτιώθηκε όπως προαναφέρθηκε σταδιακά

μέχρι την τελική της μορφή στα γυμνάσια των ετών 2008, 2009 και είναι δύσκολο να βελτιωθεί περισσότερο.

3.5 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα δραστηριότητας Ε :Διάσταση αυτοομοιότητας γραμμών Von Koch και Cantor

Οι νέα δραστηριότητα Ε με τη γραμμή von Koch (μέρος Ι) και τη γραμμή Cantor (μέρος ΙΙ), εφαρμόστηκαν για τους λόγους που προαναφέρθηκαν στις παρεμβάσεις τα έτη 2008 και 2009.

Όπως φαίνεται και στη στήλη 2 του πίνακα Γ9, 51 στις 65 ομάδες σχεδίασαν σωστά δυο επαναλήψεις της γεννήτριας von Koch, η οποία δυσκόλεψε τους μαθητές περισσότερο από τη γεννήτρια Sierpinski. Στη συνέχεια, στη τρίτη στήλη, 60 ομάδες διατύπωσαν το λόγο αυτοομοιότητας και σχημάτισαν σωστά την εξίσωση διάστασης αυτοομοιότητάς von Koch. Αντίθετα όλες οι ομάδες σχεδίασαν εύκολα τις επαναλήψεις τη γραμμής Cantor και διατύπωσαν και σχημάτισαν σωστά την αντίστοιχη εξίσωση διάστασης Cantor. Η γραμμή Cantor ήταν η τρίτη στη σειρά όπου ζητούσαμε την παραπάνω διαδικασία από τους μαθητές και όπως φαίνεται από το απόλυτο ποσοστό 100% των καταγραφών αλλά και από τις αιτιολογήσεις τους στη στήλη 6 στον πίνακα Γ9, η διαδικασία εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας έγινε πια απόλυτα κατανοητή από τους μαθητές.

Γυμνάσιο	Σχεδίαση δυο επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας και σχηματισμός εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης von Koch	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
Πγ2	*9/12*	*9*	χ=1,269	χ=0,62	*Το αποτέλεσμα διαφέρει παρόλο που είναι όλοι άρρητοι αριθμοί διότι είναι μικρότερο της μονάδας. Αυτό συμβαίνει διότι το δεύτερο μέρος της εξίσωσης είναι μικρότερο από το πρώτο.*
Πγ1	*6/9*	*9*	χ=1,27	χ=0,62	*Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα από την αρχή*
Μ2	*10/11*	*11*	χ=1,265	χ=0,621	*Διαφέρει επειδή η τιμή της διάστασης είναι 0<χ<1 επειδή σχηματίζονται*

					λιγότερα ιδία κομμάτια
Πγ2.09	*4/6*	*6/6*	*1,27*	*0,6*	*Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα κατά 1/3.*
Πγ1.09	*5/6*	*6*	χ=1,265	χ=0,621	*Επειδή είναι το μόνο που αρχίζει από 0.6….*
Μ1	*7/9*	*9*	χ=1,265	χ=0,621	*Η διάσταση είναι 0<χ<1 επειδή τα κομμάτια γίνονται λιγότερα από τα αρχικά*
5ο Β	*10/12*	10	χ=1,26	χ=0,663	*Επειδή από τα 3 κομμάτια σχηματίστηκαν 2 ίδια*

Πίνακας Γ9: Σχεδιασμός von Koch και Cantor και εύρεσης διάστασης αυτοομοιότητας

Ο υπολογισμός της διάστασης αυτοομοιότητας von Koch και Cantor στις στήλες 4 και 5 αντίστοιχα, ήταν και αυτός πολύ ικανοποιητικός (απόκλιση τάξης μεγέθους 10^{-2} δηλαδή 0,01 μόνο, σχεδόν σε όλα τα γυμνάσια).

Η γραμμή Cantor διασκέδασε τους μαθητές με την ιδιαιτερότητά της. Οι απαντήσεις τους στο φύλλο εργασίας στην ερώτηση *τι θα απέμενε τελικά;* είναι σχεδόν ταυτόσημες σε όλα τα γυμνάσια και αναφέρονται σε *άπειρες βουλίτσες, τελίτσες σκόνη* κ.λπ.

Ενδεικτικά από το 2ο γυμνάσιο Μίκρας 2009:

Μόρια, σημεία, σκόνη, άπειρες βουλίτσες, τελίτσες [αλλά και από Πειραματικό Γυμνάσιο Πανεπιστημίου Μακεδονίας 2008] *σημεία ή μικροσκοπικές γραμμές* ή *μένουν άπειρα ίσα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα.*

Οι τελευταίες καταγραφές προσεγγίζουν τη μαθηματική διατύπωση **«σκόνη του Cantor»**, και είναι σύμφωνες με τις αντιλήψεις τους για το άπειρο και τη σχέση των αντιλήψεων αυτών με τη γραμμή Cantor που αναφερθήκαν στην ενότητα VII 1.12 γ.

3.5.1 Επιλογή κωδικού Λ α, β, γ, δ (κλασματοειδή σχήματα) για να συμπεριληφθούν στην τελική πρόταση.

Οι παραπάνω δραστηριότητες πέτυχαν τους γνωστικούς τους στόχους σε μεγάλο βαθμό και δεν διαφαίνεται αναγκαιότητα βελτίωσης τους σε σχέση με αυτό. Θα συμπεριληφθούν ως έχουν στην τελική πρόταση (κεφάλαιο Χ).

Τα παραπάνω ποσοτικά συγκεντρωτικά δεδομένα, καθώς και οι αιτιολογήσεις της διαδικασίας όπως αναφέρονται στον πίνακα Γ9, τεκμηριώνουν θεωρητικό κορεσμό στην ανάλυση δεδομένων της δραστηριότητας Ε. Δε συντρέχει λόγος για νέα δραστηριότητα με θέμα τη διάσταση αυτοομοιότητας άλλων σχημάτων πέραν των von Koch και Cantor.

3.5.2 Δραστηριότητα Ε Μέρος ΙΙΙ. Ταξινόμηση σχημάτων

Στο τελευταίο αυτό τμήμα της δραστηριότητας ζητούμε από τους μαθητές την ταξινόμηση των σχημάτων της ευκλείδειας και κλασματοειδούς γεωμετρίας (ευθύγραμμο τμήμα, σημείο, τρίγωνο, τρίγωνο Sierpinski γραμμή von Koch, κύκλος, τετράγωνο, σφαίρα, κύβος, κώνος), σε σχέση τη διάσταση αυτοομοιότητας τους χ, στον παρακάτω πίνακα του φύλλου εργασίας ως εξής:

ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	***ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ***						
		$\chi=0$	$0<\chi<1$	$\chi=1$	$1<\chi<2$	$\chi=2$	$2<\chi<3$	$\chi=3$

Πίνακας Γ 10. Α, από το τελευταίο φύλλο εργασίας των μαθητών.

Οι γραμμές είναι για την ταξινόμηση των σχημάτων και οι αντίστοιχες στήλες όπου χ=0 ($3^{η}$ στήλη), 0<χ<1, ($4^{η}$ στήλη), χ=1, ($5^{η}$ στήλη), 1<χ<2, ($6^{η}$ στήλη), χ=2, ($7^{η}$ στήλη), 2<χ<3, ($8^{η}$ στήλη), χ=3, ($9^{η}$ στήλη), για τη σημείωση της διάστασης αυτοομοιότητας του κάθε σχήματος. Η ακριβής αναγραφή της διάστασης των σχημάτων της κλασματοειδούς γεωμετρίας δεν είναι απαραίτητη, αρκεί να σημειωθεί η μη ακεραία προσέγγιση της στην σωστή στήλη.

Ένα νέο σχήμα (*σφουγγάρι Menger κεφάλαιο VII κωδικός 1.12 δ*) που πρώτη φορά βλέπουν οι μαθητές αναμένεται να σημειωθεί στην στήλη *2<χ<3.* Η σωστή διαπίστωση της διάστασης αυτοομοιότητας ενός άγνωστου σχήματος της κλασματοειδούς γεωμετρίας αποτελεί απόδειξη επίτευξης του σχετικού γνωστικού στόχου της παρέμβασης.

Για τους παραπάνω λόγους το ΙΙΙ μέρος της δραστηριότητας Ε (δηλαδή η σωστή ή όχι ταξινόμηση των σχημάτων και η διαπίστωση ή όχι της διάστασης αυτοομοιότητας του άγνωστου σχήματος), αποτελεί και την τελική αξιολόγηση όχι μόνο της δραστηριότητας Ε αλλά και ολόκληρης της παρέμβασης. Οι καταγραφές στον παραπάνω πίνακα ταξινόμησης για κάθε γυμνάσιο των ετών 2008 και 2009 παρουσιάζονται χρονολογικά και αναλύονται στους πίνακες 10, θ,ι,κ,λ,μ,ν,ξ της ενότητας 2.5 του κεφαλαίου VIII.

Τα αποτελέσματα ήταν εξαιρετικά ενθαρρυντικά σε όλα τα γυμνάσια και παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στο κεφάλαιο της αξιολόγησης XI.2

Κεφ. Χ
Τελική πρόταση

Θεωρητικός κορεσμός (theoretical saturation)

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ολοκληρωμένη η τελική μας πρόταση της διδακτικής παρέμβασης για αξιοποίηση της μη γραμμικότητας μέσα από μαθηματικές δραστηριότητες.

Γενικά όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο IX οι δραστηριότητες Α-Ε, με τη συνεχή βελτίωση και ανατροφοδότησή τους κατά έτη 2006-2009, καλύπτουν το επιστημονικό περιεχόμενο που μας ενδιαφέρει και οι εκάστοτε γνωστικοί στόχοι πέτυχαν σε σημαντικό βαθμό. Τα αναλυτικά ποσοτικά δεδομένα του κεφαλαίου VIII, καθώς τα συγκεντρωτικά και οι αιτιολογήσεις της διαδικασίας, όπως και η τελική επιλογή των κωδικών στο κεφάλαιο IX τεκμηριώνουν αθροιστικά τον θεωρητικό κορεσμό στο σύνολο της τελικής πρότασης. Οι γνωστικοί στόχοι όπως προαναφέρθηκε έχουν επιτευχθεί ικανοποιητικά και δε φαίνεται να συντρέχει λόγος για νέες δραστηριότητες ή για οποιαδήποτε άλλη μεταβολή στη διδακτική μας πρόταση.

Η ανάλυση τύπου grounded theory που προηγήθηκε ανέδειξε την τελική μορφή των δραστηριοτήτων στα φύλλων εργασίας, όπως αυτή εφαρμόστηκε χωρίς περαιτέρω αλλαγές τα έτη 2008, 2009. Κεντρική ιδέα είναι η διδακτική αξιοποίηση της αυτοομοιότητας και της διάστασης αυτοομοιότητας, με πυρήνα τις δραστηριότητες Α, Β και Δ αντίστοιχα. Οι κωδικοί που συμπεριλαμβάνονται στην κεντρική ιδέα είναι οι κωδικοί Α, Β, Γ, Δ, Ε, Θ, Ι, Κ, Λ.

Αναλυτικά η ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων της Θεμελιωμένης Θεωρίας των ετών 2006-2009 (κεφάλαια VII, VIII, IX) ανέδειξε τις εξής μεταβολές στην διδακτική μας πρόταση:

1. Οι απόψεις των μαθητών μας για τη δυνατότητα πρόβλεψης του παιχνιδιού του χάους ήταν περισσότερες από ότι αναμενόταν. Η σειρά των δραστηριοτήτων Α

και Β με το τρίγωνο Sierpinski και το παιχνιδιού του χάους άλλαξε, με τρόπο ώστε να μην επηρεάζονται οι καταγραφές δυνατότητας πρόβλεψης των μαθητών.

2. Το τρίγωνο Pascal αποδείχθηκε οριστικά ακατάλληλο και αφαιρέθηκε από την παρέμβαση. Η επέκταση των χαρακτηριστικών της μη γραμμικής προσέγγισης σε άλλα πεδία, γινόταν πλέον με μια νέα δραστηριότητα Γ, (που έφερε στοιχεία από τη διερεύνηση στην πρωτοβάθμια και την αρχική έρευνα δράσης), και είχε εξαιρετικά ποιοτικά και ποσοτικά αποτελέσματα σε σχέση με τους γνωστικούς στόχους της.

3. Ο απαιτητικός γνωστικός στόχος της προσέγγισης της άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας, μετά τη βελτίωση της σχετικής δραστηριότητας Δ το 2007 στο δεύτερο και τρίτο μέρος της δραστηριότητος, άγγιζε πλέον με τις αντίστοιχες αιτιολογήσεις το 70% των καταγραφών των μαθητών (κεφάλαια VIII, και IX, και κεφάλαιο Χ 4.4, πίνακας Γ8).

4. Η επιβεβλημένη συνέχεια με νέα σχήματα με την τελευταία δραστηριότητα Ε τα έτη 2008-09, έφερε τα ποσοστά της άρρητης πλέον προσέγγισης και της σωστής αιτιολόγησης της διάστασης αυτοομοιότητας στο 75 έως 100% (στη διάσταση Cantor) των καταγραφών των μαθητών.

Τα φύλλα εργασίας στα οποία καταλήξαμε, εντάσσονται στη διδακτική μας πρόταση. Παρουσιάζονται πιο κάτω με τη σειρά που χρησιμοποιούνται στην παρέμβαση και αναλύονται τα διδακτικά επιχειρήματα και οι οδηγίες προς τον καθηγητή που τα συνοδεύουν.

Τα συνοπτικά αποτελέσματα και μόνο οι πιο σημαντικοί πίνακες αποτελεσμάτων παρουσιάζονται για λόγους πληρότητας και ευχρηστίας για μια ακόμη φορά μετά από κάθε δραστηριότητα.

1.Α. ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

Για τον Piaget τα μαθηματικά αναπτύσσονται από την αλληλεπίδραση πραγματικότητας και σκέψης, δεν είναι δεδομένα στην πραγματικότητα ούτε εγγεγραμμένα στον νου, αλλά αποτελούν μια σύνθεση της ανακάλυψης και της δημιουργίας. Προσαρμόζοντας αυτή την διπλή άποψη στην διαδικασία διδασκαλίας και εκμάθησης των μαθηματικών, οι δάσκαλοι πρέπει να λειτουργήσουν για τους μαθητές σαν τα μαθηματικά αντικείμενα να υπάρχουν και πρέπει να ανακαλυφθούν από αυτούς, ενώ οι μαθητές πρέπει να μάθουν να κατασκευάζουν αυτά τα αντικείμενα για τον εαυτό τους.

Στην περίπτωση μας όπως προαναφέρθηκε όλη η πρότασή μας στηρίζεται σε έργα μαθητών (δραστηριότητες Α-Ε), σε εποικοδομητικό και ομαδοσυνεργατικό διδακτικό πλαίσιο (Cobb, P., Yackel, E. Wood, T. 1992, Glasersfeld, E. 1987, 1988, Johnson, R. T., Johnson, D. W. 1990, Scott, P., Asoko, H., Driver, R. 1992).

Στην παρέμβασή μας οι μαθητές «κατασκευάζουν» οι ίδιοι την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος, πιο συγκεκριμένα βιώνουν οι ίδιοι με τη δραστηριότητα Α μέσα από το παιχνίδι του χάους την εξέλιξη αυτή. Η ανάλυση έδειξε ότι από το αρχικό στάδιο της έρευνας δράσης μας μέχρι και τις τελευταίες παρεμβάσεις μας το 2009, η δραστηριότητα Α (το παιχνίδι του χάους), είναι η πιο πλούσια σε διδακτικά αποτελέσματα.

Το παραπάνω παιχνίδι είναι σε διάφορες μορφές του διαδεδομένο στη βιβλιογραφία και στο διαδίκτυο, όπου προτείνεται και η εκτέλεσή του με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, (www.jgiesen.de/chaosSpiel, Devaney, 2000, 2003, Behr, R. 1994. Nemirovsky, R 1993 κ.α.). Η πρόταση για την διδακτική του αξιοποίηση δεν είναι καινούρια, η πρωτοτυπία της δικής μας πρότασης είναι ότι το παιχνίδι παίζεται από τους ίδιους τους μαθητές, με το ζάρι στο ένα χέρι και τον χάρακα στο άλλο. Το διδακτικό έργο αυτό όπου οι μαθητές εργάζονται με τα χέρια και όχι με πληκτρολόγιο, και διαπιστώνουν την απρόβλεπτη εξέλιξη του δυναμικού συστήματος αλλά τελικά και την εσωτερική τάξη του, όχι με κάποιους άγνωστους υπολογισμούς στην οθόνη ενός υπολογιστή αλλά μπροστά στα μάτια τους, **είναι η πρώτη καινοτομία της πρότασης διδακτικής αξιοποίησης μας**. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές σχεδιάζουν και βιώνουν οι ίδιοι με τον χάρακα στο χέρι την εξέλιξη τους συστήματος και βλέπουν στα γύρω θρανία τις άλλες ομάδες να κάνουν το ίδιο στα δικά τους συστήματα. Η δική τους διαφάνεια και τελικά το σύνολο των διαφανειών της τάξης στο διαφανειοσκόπιο, αντικαθιστούν την οθόνη του ηλεκτρονικό υπολογιστή.

1.1. Γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας.

Στη δραστηριότητα Α επιδιώκουμε να διαπιστώσουν οι μαθητές μέσα από το παιχνίδι, την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος, αλληλένδετη όμως με την ύπαρξη εσωτερικής δομής στα συστήματα αυτά. Πιο συγκεκριμένα επιδιώκουμε να διαπιστώσουν την εμφάνιση πολύπλοκης (χαοτικής) συμπεριφοράς από απλούς αρχικούς κανόνες (Χρηστίδης, Θ. 1997, Duit, R. 1997, Komorek, M. 1997, Σταύρου, Δ., 2002. Peitgen, H.O. 1992a,b κ.α.), καθώς και τη σχέση της εξέλιξης του χαοτικού συστήματος (σε ένα απρόβλεπτο επίπεδο) με το τρίγωνο της επόμενης δραστηριότητας Β (Duit, R. 1997, Peitgen H.O. , 1992a, b, Devaney, R.L. 2003, βλ και κεφάλαιο VII 1.1, 1.2).

1.2. Φύλλο εργασίας

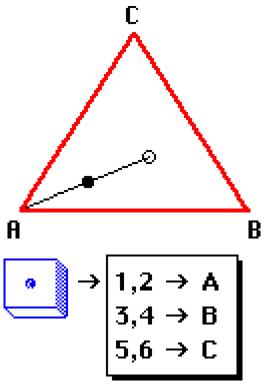
Στη συνέχεια παρατίθεται το φύλλο της δραστηριότητας Α της τελικής μας πρότασης, όπως δίνεται στους μαθητές:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Α

1. α. Διάβασε προσεχτικά τους κανόνες του παιχνιδιού. Αν επαναλάβουμε αρκετές φορές το βήμα 2, τι νομίζεις ότι θα συμβεί;

β. Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ



Οι κανόνες:

1. Διάλεξε ένα οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης **(ο)** στο τρίγωνο ABC.

2. Ρίξε το ζάρι.

3. **Σημείωσε το μέσο μιας νοητής γραμμής**

   προς το **A**, αν φέρεις **1** ή **2** ,

   προς το **B**, αν φέρεις **3** ή **4**,

   προς το **C**, αν φέρεις **5** ή **6**.

   Αυτό είναι το νέο σημείο εκκίνησής σου.

4. **Επανάλαβε το βήμα 2.**

2. Πως θα χαρακτηρίζατε τις κουκίδες στη διαφάνειά σας;

α. Σκόρπιες.

β. Συγκεντρωμένες σε μια περιοχή.

γ. Συγκεντρωμένες σε πολλές περιοχές.

δ. Άλλο.

3. Πως θα χαρακτηρίζατε τις κουκίδες όλων των διαφανειών της τάξης σας;

α. Σκόρπιες.

β. Συγκεντρωμένες σε μια περιοχή;

γ. Συγκεντρωμένες σε πολλές περιοχές;

δ. Άλλο.

1.3 Οδηγίες προς τον καθηγητή

Οι ομάδες μαθητών σχηματίζονται ανά 2 δηλαδή ανά θρανίο. Στη συνέχεια μοιράζεται από ένα φύλλο δραστηριότητας για κάθε ομάδα με την αυστηρή σειρά αρίθμησης. Μετά από τη συμπλήρωση τα φύλλα εργασίας συγκεντρώνονται από τον καθηγητή στην έδρα, πριν τη διάθεση ενός νέου φύλλου. Σε καμιά περίπτωση δεν μοιράζονται τα επόμενα φύλλα ταυτόχρονα.

Μοιράζεται το φύλλο της δραστηριότητας Α μαζί με μια διαφάνεια ανά ομάδα. Πριν την εκτέλεση του παιχνιδιού οι μαθητές διαβάζουν προσεχτικά τις οδηγίες και εφόσον χρειαστεί ο καθηγητής δείχνει τα πρώτα βήματα στην πίνακα. Πριν το παιχνίδι οι μαθητές καταγράφουν τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις 1α και 1β.

Στη συνέχεια το παιχνίδι εκτελείται με προσοχή και για περίπου 20 βήματα από κάθε ομάδα μαθητών σε μια διαφάνεια, (ο ένας μαθητής χρησιμοποιεί τον χάρακα και το μαρκαδόρο, ο άλλος ρίχνει το ζάρι). Ο μαθητής με τον χάρακα σημειώνει τις κουκίδες στη διαφάνεια με μαρκαδόρο. Η θέση εκκίνησης δε σημειώνεται με μαρκαδόρο, παρά μόνο με το δάχτυλο.

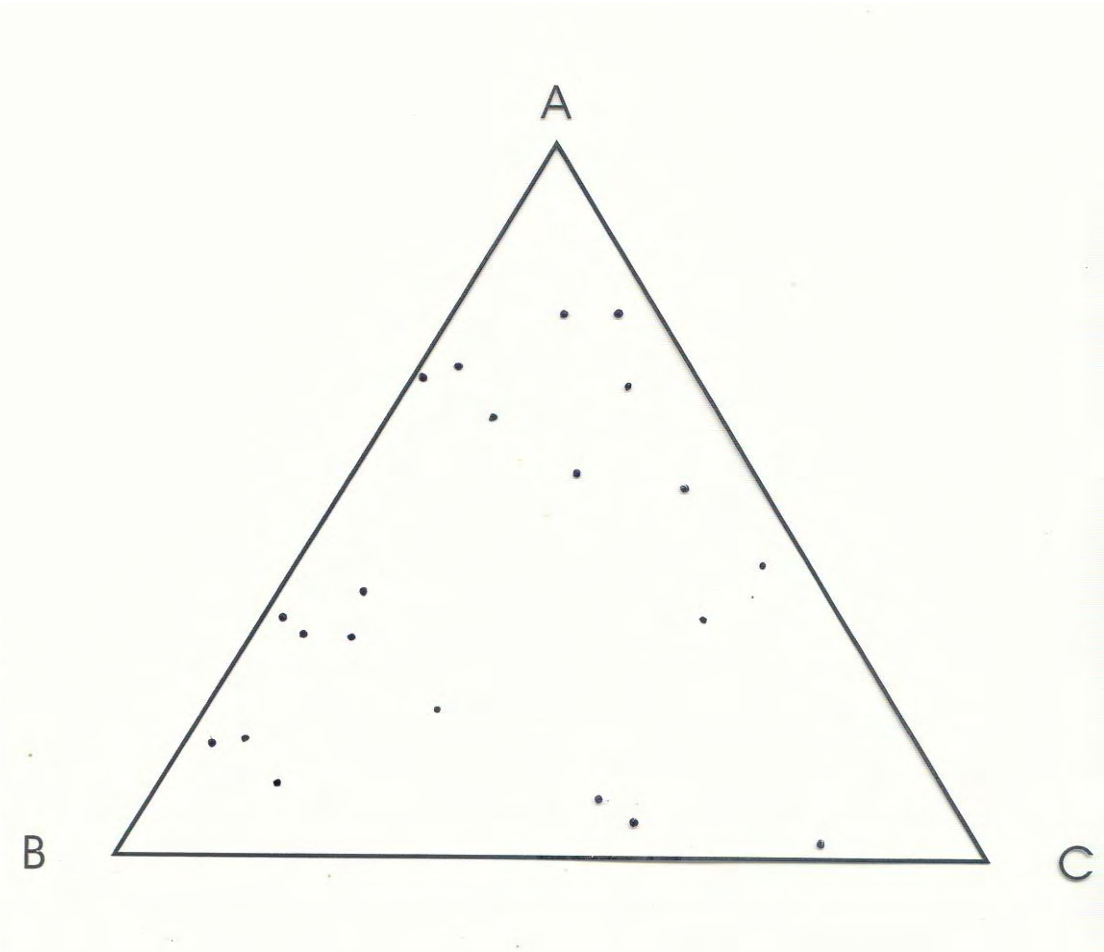
Μετά την εκτέλεση του παιχνιδιού, μοιράζεται η δεύτερη σελίδα και οι μαθητές απαντούν στις ερωτήσεις 2 και 3. Οι διαφάνειες συγκεντρώνονται από τον καθηγητή στην έδρα.

1.4. Σύνοψη αποτελεσμάτων

Η ανάλυση των καταγραφών επιβεβαίωσε τις διαδεδομένες απόψεις των μαθητών για τον ορισμό του τριγώνου (Χατζηκυριάκου, 2004). Επιβεβαίωσε ακόμη την αποδοχή από μεγάλο μέρος των μαθητών της δυνατότητας πρόβλεψης καθώς και της ύπαρξης τάξης στα εξελισσόμενα συστήματα (Peitgen H.O, 1992a, b, Komorek, M. 1997. Nemirovsky, R. 1993 Σταύρου, Δ., 2002 κ.α., βλ. κεφ. VII 1.1.). Οι περισσότεροι μαθητές όπως προέκυψε από την ανάλυση του κεφαλαίου VII καταγράφουν στη σχετική ερώτηση ότι προβλέπουν την εξέλιξη του παιχνιδιού, χωρίς να μπορούν όμως τις περισσότερες φορές να το αιτιολογήσουν στο φύλλο δραστηριότητας. Ενδεικτικά:

Ναι, πιστεύω θα μπορούσε να σχηματιστεί κάποιο σχήμα, γιατί ενώνοντας συνεχώς κουκίδες ανάλογα με το τι τυχαίνει το ζάρι θα βγει κάποιο σχήμα. Είναι πολύ πιθανόν το σχήμα που θα σχηματίζεται να είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

Εκτελώντας το παιχνίδι όμως, οι μαθητές στο σύνολο τους εγκατέλειπαν την πεποίθηση της πρόβλεψης της κατάληξης του παιχνιδιού και διαπίστωναν για τις κουκίδες τους (ερωτήσεις 2) ότι φαίνονταν *σκόρπιες ή τυχαίες ή διάσπαρτες*:



2.Β. ΤΡΙΓΩΝΟ SIERPINSKI

Σύμφωνα με τον Goldenberg, P. (1999), στο *Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry* κάθε δραστηριότητα θα πρέπει να βασίζεται στη γεωμετρία. Το θέμα της γεωμετρίας είναι βατήρας για το πρόγραμμα σπουδών μας, και στόχος της σύνδεσής της με τα υπόλοιπα μαθηματικά, (στο Πατσιομίτου Στ., Κυνηγός Χ., 2005).

Στη δική μας διερεύνηση αφού εξετάσαμε διάφορες δραστηριότητες με βασικό εργαλείο κάποιο άλλο σχήμα της κλασματοειδούς γεωμετρίας (fractal), επιλέξαμε τελικά δραστηριότητες με το τρίγωνο Sierpinski. Το τρίγωνο αυτό είναι καταλληλότερο από άλλα παρόμοια κλασματοειδούς σχήματα, γιατί εμφανίζει άμεσα την επαναληπτικότητα και την αυτοομοιότητα. Ακόμη αποτελεί την εσωτερική δομή απλών δυναμικών συστημάτων, με πολλές σχετικές προτάσεις από το διαδίκτυο και τη βιβλιογραφία για την αξιοποίησή του στη διδασκαλία (Nemirovsky, R. 1993, Devaney, R.L. 2000, 2003 Adams, T.L. 2006, Πατσιομίτου Σ., Κυνηγός Χ, 2005 β. κεφάλαιο VII 1.12 κ.α.). Με βασικό εργαλείο το τρίγωνο Sierpinski (ως *βατήρα* σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο) σχεδιάσαμε την δραστηριότητα Β.

2.1. Γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας.

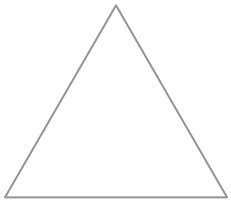
Στη δραστηριότητα Β επιδιώκουμε να διαπιστώσουν οι μαθητές την αυτοομοιότητα και την επαναληπτικότητα ως βασικά χαρακτηριστικά του τριγώνου Sierpinski.

2.2. Φύλλο εργασίας

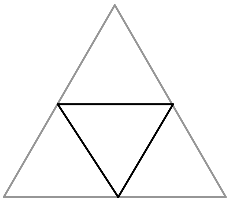
Στη συνέχεια παρατίθεται το φύλλο της δραστηριότητας Β της τελικής μας πρότασης, όπως δίνεται στους μαθητές:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Β

1. Το αρχικό τρίγωνο (σχήμα Α) το χωρίζουμε σε 4 ίσα τρίγωνα (όπως στο σχήμα Β). Μαυρίζουμε την επιφάνεια του μεσαίου (δηλαδή του αντεστραμμένου τριγώνου), θεωρώντας ότι η επιφάνειά του έχει κοπεί και αφαιρεθεί από την επιφάνεια του τριγώνου. Πόσα λευκά τρίγωνα παραμένουν στο εσωτερικό του τριγώνου;



(Σχήμα Α)



(Σχήμα Β)

Επανάλαβε την παραπάνω διαδικασία άλλες δυο φορές.

2. α. Πόσες φορές κατά τη γνώμη σου μπορεί να συνεχιστεί η παραπάνω διαδικασία;

β. Τι διαπιστώνεις να συμβαίνει κατά την επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας;

3. Στην οθόνη του υπολογιστή βλέπουμε και άλλες επαναλήψεις. Πώς θα περιέγραφες τη διαδικασία και το αποτέλεσμά της στην οθόνη του υπολογιστή;

Α. 4. Ποιο σχήμα σχηματίστηκε τελικά από όλες τις διαφάνειες μαζί;   Γιατί κατά τη γνώμη σου έγινε αυτό;

2.3 Οδηγίες προς τον καθηγητή:

Το τρίγωνο Sierpinski μελετήθηκε από τον Πολωνό μαθηματικό Waclaw Sierpinski το 1916. Κάθε ένα από τα τρίγωνα που σχηματίζονται, είναι μια από τις διαδοχικές «φωτογραφίες» του τριγώνου Sierpinski.

Κάθε νέο τρίγωνο (τεμάχιο) που σχηματίζεται -αν αφαιρεθεί και συγκριθεί- είναι όμοιο με το τρίγωνο της προηγούμενης επανάληψης (φωτογραφίας). Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται αυτοομοιότητα. Η διάσταση αυτοομοιότητας είναι άρρητος αριθμός.

Τα σχήματα που χαρακτηρίζονται από συνεχείς επαναλήψεις ενός αρχικού σχήματος, (γεννήτριας) μελετήθηκαν κυρίως από τον Mandelbrot το 1975 και έγιναν γνωστά σαν fractal. Η μελέτη των fractal πήρε μεγάλη ώθηση με την πρόοδο των Η.Υ. Στα ελληνικά ο όρος fractal σχήμα θα μπορούσε να αποδοθεί σαν κλασματοειδές σχήμα.

Στη δραστηριότητα Β ζητάμε το σχεδιασμό στο φύλλο δραστηριότητας δυο επαναλήψεων της γεννήτριας του τριγώνου Sierpinski. Δεν πρέπει ο καθηγητής επεξηγώντας να σχεδιάσει επαναλήψεις του τριγώνου. Η εμπειρία έδειξε ότι με προσεχτική ανάγνωση της διατύπωσης της ερώτησης όλες οι ομάδες, η μια μετά την άλλη κατανοούν τη διαδικασία και σχεδιάζουν με ευχαρίστηση 2 ή περισσότερες επαναλήψεις.

Οι μαθητές απαντούν στο πόσες φορές κατά τη γνώμη τους μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία και ζητάμε να καταγράψουν τις διαπιστώσεις τους.

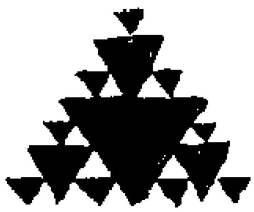
Στη συνέχεια οι μαθητές παρατηρούν στον υπολογιστή επαναλήψεις (iterations) του τριγώνου (Sierpinski.gif., παράρτημα Α) και καταγράφουν ξανά τις διαπιστώσεις τους.

Στο σημείο αυτό προβάλλονται επικαλυμμένες οι διαφάνειες του παιχνιδιού του χάους όλης της τάξης επικαλυμμένες όλες μαζί στο διαφανειοσκόπιο. Ο καθηγητής μπροστά στους μαθητές προσπαθεί να πετύχει την επικάλυψη τους με μια διαφάνεια που περιέχει τυχαία κύκλους, τρίγωνα κ.λπ., χωρίς η επικάλυψη να είναι εφικτή. Τελικά χρησιμοποιεί μια διαφάνεια του τριγώνου Sierpinski. **Οι εσωτερικές γραμμές του τριγώνου Sierpinski προσεγγίζονται πλέον από τις κουκίδες όλων των μαθητών, ο αριθμός των οποίων (300-400 ανά τάξη) αντιστοιχεί στον ελάχιστο απαραίτητο αριθμό κουκίδων από Η. Υ. της σχετικής βιβλιογραφίας** (Peitgen H.O , 1992a, b, Devaney, R. L. 2000, 2003).

Στο τέλος της δραστηριότητας ζητάμε τη γνώμη των μαθητών για την εμφάνιση του τριγώνου (ερώτηση Α.4). Αναμένουμε ακόμη μέσα από τις καταγραφές και τις εξηγήσεις που δίνουν οι μαθητές, να χρησιμοποιούν με δικά τους λόγια έννοιες της μη γραμμικότητας.

2.4. Σύνοψη αποτελεσμάτων

Στο τρίγωνο Sierpinski σχεδόν όλες οι ομάδες μαθητών σχεδίασαν σωστά τις δυο επαναλήψεις, (ένα 30% των μαθητών σνεδίασε χωρίς να το ζητάμε και περισσότερες επαναλήψεις).



Εικόνα 1: Δυο επαναλήψεις του τριγώνου Sierpinski από ομάδα μαθητών.

Οι μαθητές διαπίστωσαν στο σύνολό τους ότι μπορούν να συνεχίσουν τη διαδικασία χωρίς τέλος. Οι καταγραφές αναφέρονται σε ποσοστό περίπου 90% και στην επαναληπτικότητα και στην αυτοομοιότητα του τριγώνου. Ενδεικτικά:

Το σχήμα αυτό επαναλαμβάνεται, διότι η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές.

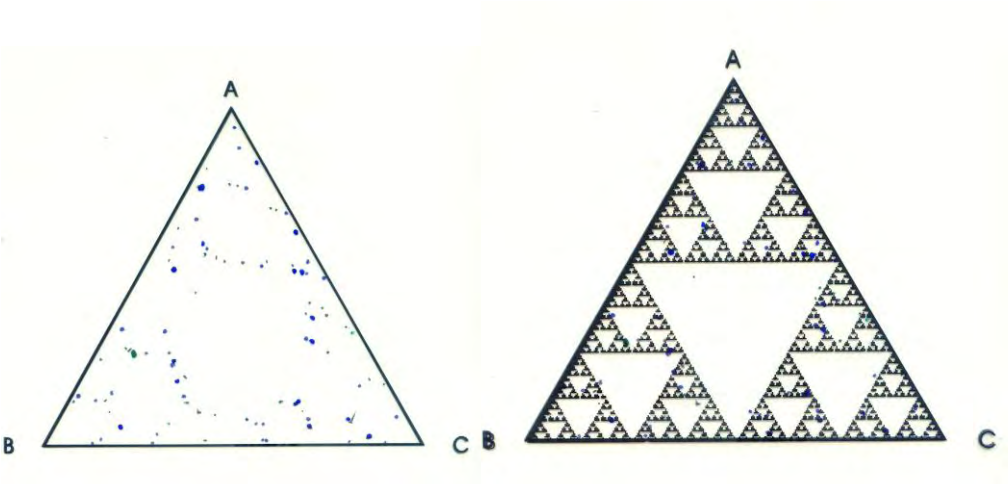
Παρατηρώ ότι στο παραπάνω τρίγωνο μπορώ να δημιουργήσω άπειρα ίδια τρίγωνα στο εσωτερικό του.

Ανάλογες καταγραφές ακολουθούν την παρατήρηση επαναλήψεων στον υπολογιστή:

Ο υπολογιστής μεγεθύνει τα τριγωνάκια που δεν μπορούμε να τα δούμε με ανθρώπινο μάτι και έτσι δημιουργούνται άπειρα τριγωνάκια.

Παρατηρώ ότι όσες επαναλήψεις (μεγεθύνσεις) και αν συμβούν βλέπω το ίδιο σχήμα.

Στη συνέχεια η επικάλυψη των διαφανειών των μαθητών του παιχνιδιού του χάους από το τρίγωνο Sierpinski είναι σημείο κλειδί της τελικής μας πρότασης. Ένα ενδεικτικό αποτέλεσμα από ένα γυμνάσιο:



Εικόνα 2: Επικάλυψη διαφανειών στο 7ο Γυμνάσιο Καλαμαριάς

Η εμφάνιση του τριγώνου της προηγούμενης δραστηριότητας από τις διαπιστωμένες από τους μαθητές *σκόρπιες* κουκίδες, προκάλεσε σε όλα τα γυμνάσια ισχυρή εντύπωση. **Η γνωστική σύγκρουση** σε σχέση με τις προηγούμενες διαπιστώσεις των μαθητών στο σημείο αυτό, αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την επίτευξη των γνωστικών στόχων της δραστηριότητας Α.

Οι εξηγήσεις των μαθητών για την εμφάνιση του τριγώνου Sierpinski στο παιχνίδι του χάους μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες:

1. Οι μαθητές αναζήτησαν σταθερές παραμέτρους στο φαινομενικά περίπλοκα εξελισσόμενο σύστημα, όπως οι περιορισμένες κατευθύνσεις ή το μέσο της απόστασης κίνησης κ.α. Ενδεικτικά:

Δεν είναι πραγματικά τυχαίο γιατί το ζάρι έχει 6 νούμερα.

Σχηματίστηκε ένα τρίγωνο Sierpinski γιατί οι αριθμοί του ζαριού αντιστοιχούν ανά δυο σε κάθε κορυφή του τριγώνου με τέτοιο τρόπο ώστε όποια σημεία και αν τραβήξουμε θα βγει ένα τρίγωνο Sierpinski.

Σχηματίστηκε ένα τρίγωνο Sierpinski. Αυτό έγινε γιατί το ανεστραμμένο τρίγωνο αποτελείται από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου της δραστηριότητας Β, όποτε άμα φέρουμε τα μέσα των σημείων προς τις κορυφές A, B, C, θα σχηματιστεί το τρίγωνο Sierpinski.

Σχηματίστηκε το τρίγωνο της δραστηριότητας Β. Γιατί ήταν καθορισμένο από την αρχή προς ποια πλευρά του τριγώνου θα πήγαινε κάθε νούμερο που παίχτηκε και πόση θα ήταν η απόσταση από τα σημεία A, B, C.

Οι καταγραφές αυτές αναφέρονται στη θεωρία του αιτιοκρατικού χάους και αντιστοιχούν περίπου στο 55% του συνόλου των καταγραφών.

2. Οι μαθητές διαπίστωσαν την ύπαρξη σημείων συγκέντρωσης ή περιοχών συγκέντρωσης των κουκίδων. Ενδεικτικά:

Δεν ήταν πραγματικά τυχαίο, υπάρχουν περιοχές που τραβάνε τα σημεία και έχουμε επαναλαμβανόμενα όμοια τρίγωνα.

Σχηματίστηκε το τρίγωνο Sierpinski γιατί τα σημεία είναι μαζεμένα και το ένα πατάει στο άλλο και έτσι ενώνονται σχηματίζοντας μικρά τρίγωνα.

Τελικά σχηματίστηκε ένα τρίγωνο που ονομάζεται Sierpinski. Πιστεύω εγώ και η συμμαθήτριά μου πως έγινε αυτό γιατί θα υπάρχει (λογικά) μια συμμετρία ανάμεσα στα σημεία έτσι ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να τα κατευθύνει έτσι ώστε να σχηματίζονται και άλλα τριγωνάκια.

Σχηματίστηκαν τρίγωνα που χωρίζουν ένα τρίγωνο σε τέσσερα όμοια τρίγωνα, γιατί τα σημεία πέφτουν στις κορυφές των τριγώνων αυτών.

Οι καταγραφές αυτές αναφέρονται σε σημεία ή περιοχές έλξης από τη θεωρία εξέλιξης δυναμικών συστημάτων και αντιστοιχούν περίπου στο 15% του συνόλου των καταγραφών.

Αθροιστικά οι σωστές αιτιολογήσεις παραμένουν περίπου στο 70% σε όλες τις παρεμβάσεις. Όπως προαναφέρθηκε, οι δυο πρώτες δραστηριότητες αποτελούν την κεντρική ιδέα της πρότασής μας. Τα αποτελέσματα του παιχνιδιού του χάους και του τριγώνου Sierpinski είναι κατά τη γνώμη μας πολύ θετικά.

3.Γ. ΚΛΑΣΜΑΤΟΕΙΔΗ ΣΧΗΜΑΤΑ

Η μαθηματική μελέτη της φύσης βασισμένη πρωταρχικά στα γεγονότα δεν είναι κάτι νέο και αποτελεί περιεχόμενο των *πειραματικών μαθηματικών.* Με τον όρο πειραματικά μαθηματικά χαρακτηρίζεται μια μαθηματική προοπτική που πέρα από την *απόδειξη* στηρίζεται σε *γεγονότα* (Peitgen. H.O. 2000). Οι Αρχιμήδης και Δημόκριτος χρησιμοποίησαν πειραματικά μαθηματικά, ωστόσο οι επιστημολογικές ρίζες της παραπάνω προσέγγισης βρίσκονται στα ρεύματα της Φυσικής Φιλοσοφίας και Φυσικής Ιστορίας (στο Peitgen. H.O. 2000, και στο Πατσιομίτου Στ., Κυνηγός Χ., 2005).

Ο K. Falconer στο βιβλίο του *Fractal Geometry* γράφει: Η λέξη fractal είναι σαν τη λέξη ζωή. Μπορείς να περιγράψεις τις βασικές της ιδιότητες και τα θεμελιώδη στοιχεία που την αποτελούν αλλά δεν μπορείς να την κλείσεις σε έναν ορισμό. Επιχειρώντας να ορίσουμε κάπως την έννοια θα λέγαμε ότι "είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που μπορεί να υποδιαιρεθεί σε μέρη, καθένα από τα οποία είναι ένα αντίγραφο μειωμένου μεγέθους του συνόλου. Τα Fractal είναι γενικά αυτοόμοια σχήματα ανεξάρτητα από την κλίμακα" (Falconer, K. 2003, βλ. κεφάλαιο II. 3. 1,2,3,4).

3.1. Γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας.

Στη δραστηριότητα Γ διαπιστώνεται μέσω των καταγραφών και των ορισμών των ίδιων των μαθητών η χρήση των εννοιών της μη γραμμικής γεωμετρίας (αυτοομοιότητα-επαναληπτικότητα βλ. κεφάλαιο VII 1.4, 1.5. Ακόμη προσφέρεται η δυνατότητα να αναφερθούν από τους μαθητές και άλλες ιδιότητες της νέας γεωμετρίας, όπως η ανεξαρτησία από κλίμακα ή γεννήτρια κ.α, καθώς και η σύνδεση της με σχήματα και φαινόμενα από τη φύση.

Αναμένεται ακόμη σε σχετική ερώτηση να δοθεί μετά από συζήτηση με όλη την τάξη από κοινού ο ορισμός της αυτοομοιότητας (βλ. κεφάλαιο VII 1.8,1.9).

3.2. Φύλλο εργασίας.

Στη συνέχεια παρατίθεται το φύλλο της δραστηριότητας Γ της τελικής μας πρότασης, όπως δίνεται στους μαθητές:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Γ

1. Στον υπολογιστή βλέπουμε επαναλήψεις και άλλων σχημάτων. Παρατήρησε ακόμη τις συνοδευτικές εικόνες στο διαφανειοσκόπιο, ακούγοντας και τη μουσική. Ποια νομίζεις ότι είναι τα κοινά χαρακτηριστικά τους;

2. Τι ονομασία θα μπορούσαμε να δώσουμε στις εικόνες αυτές; Γιατί;

3. Υπάρχουν σχήματα στη φύση που να περιγράφονται με τον παραπάνω τρόπο;

3.1. Οδηγίες προς τον καθηγητή.

Στην αρχή της δραστηριότητας προβάλλονται εικόνες, σχήματα στο διαφανειοσκόπιο και προσομοιώσεις από υπολογιστή (παράρτημα Α). Ακούγεται ταυτόχρονα μουσική (*fractal music,* από τις ιστοσελίδες της βιβλιογραφίας). Οι μαθητές καταγράφουν τα κοινά χαρακτηριστικά όλων αυτών στην ερώτηση 1.

Στη συνέχεια στην ερώτηση 2, οι μαθητές καταγράφουν την ονομασία που κατά τη γνώμη τους ανταποκρίνεται καλύτερα στις εικόνες και γιατί.

Ακολουθεί συζήτηση με όλη την τάξη και οι μαθητές αφήνονται από κοινού να αποφασίσουν για το όνομα των εικόνων που θα δώσει η τάξη τους. Δεν πρέπει σε καμιά περίπτωση ο καθηγητής να υποβοηθήσει ή να δώσει ο ίδιος τον ορισμό της αυτοομοιότητας.

Η εμπειρία έδειξε ότι συνήθως δίνεται ο ορισμός της αυτοομοιότητας όχι όμως αυτούσια, αλλά με διαφορετική διατύπωση με απλά λόγια των μαθητών.

Οι απαντήσεις στην τελευταία ερώτηση συνδέουν τα χαρακτηριστικά της νέας γεωμετρίας με σχήματα ή εικόνες στη φύση και στο περιβάλλον τους.

Στο σημείο αυτό και αφού έχουν ολοκληρωθεί οι καταγραφές στα φύλλα εργασίας, η ονομασία της νέας γεωμετρίας *κλασματοειδής γεωμετρία* και η αγγλική μετάφραση *fractal geometry* δίνεται από τον καθηγητή

3.1. Σύνοψη αποτελεσμάτων.

Τα αποτελέσματα της δραστηριότητας Γ ήταν πολύ ενθαρρυντικά για την προσπάθεια της διδακτικής αξιοποίησης μας. Παρουσιάζονται συνοπτικά και για όλα τα γυμνάσια στον πίνακα Γ5 του κεφαλαίου ΙΧ που παρατίθεται ξανά εδώ:

Γυμνάσιο	Ονομασία εικόνων	Διατύπωση αυτοομοιότητας	Εφαρμογές στη φύση
7ο Β	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα σε τρισδιάστατες εικόνες.*	*Υπάρχει κάποιο σχήμα που επαναλαμβάνεται πολλές φορές μέχρι να γεμίσει το χώρο*	*Κουνουπίδι, έλατο*
Περ	-	-	-
5ο Κ	*Επαναλαμβανόμενες εικόνες*	-	-
7ο Κ	*Ατελείωτες αυτόμοιες εικόνες*	*Όμοιες με τον εαυτό τους*	*Εικόνες βασισμένες στη γεωμετρία στη φύση*
6ο Κ	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Αυτοομοιότητα (όμοια γεωμετρικά σχήματα μέσα στο ίδιο το σχήμα)*	*κουνουπίδι*
3ο Κ	*Βασίζονται σε ένα ομοιόμορφο μοτίβο ή σχήμα*	*ομοιόμορφο μοτίβο*	*Έλατο, τυφώνας*
4ο Κ	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Ατελείωτες όμοιες με τον εαυτό τους εικόνες*	*Έλατο*
Επ	*Τάξη στο χάος*	*Ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο*	*Έλατο, κουνουπίδι κ. λπ.*
Πγ2	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	*Έλατο, κουνουπίδι , σύμπιαν κ.λπ.*
Πγ1	*Συνεχής αυτοομοιότητα*	*Συνεχής αυτοομοιότητα, όμοια με τον εαυτό τους επαναλαμβανόμενα σχήματα*	*Μαίανδρος, έλατο, κουνουπίδι κ.λπ.*
Μ2	*Επαναλαμβανόμενη ομοιότητα*	*Χωρίς τέλος προέκταση της ομοιότητας*	*Το κουνουπίδι, τα φύλλα κάποιων δέντρων, κύτταρα, νιφάδες χιονιού μικροοργανισμοί*
Πγ2.09	*Εικόνες με όμοιες λεπτομέρειες*	*Σχήματα με όμοιες λεπτομέρειες*	*Μπρόκολο, σταλαγμίτης, κουκουνάρια, δέντρο*
Πγ1.09	*Εικόνες με επαναλαμβανόμενες λεπτομέρειες*	*'Όμοιες λεπτομέρειες επαναλαμβάνονται συνεχώς*	*Κουκουνάρια, μπρόκολο, αιμοσφαίρια*
Μ1	*Άπειρα επαναλαμβανόμενες αυτόμοιες εικόνες*	*Επαναλαμβανόμενες και όμοιες με τον εαυτό τους*	*Έλατο, (γενικά μερικά φυτά), το μπρόκολο, θάμνοι, το κοράλλι*
5ο Β	*Αυτοόμοιες*	*Αυτόμοιες Ονομάζονται έτσι γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό*	*Το κοράλλι, τα φύλλα δέντρων, κύτταρα, κύματα της θάλασσας κουνουπίδι χόρτο σφουγγάρι*

Πίνακας Γ5. κοινά χαρακτηριστικά εικόνων, ονομασία εικόνων, ορισμός αυτοομοιότητας και εφαρμογές στη φύση από τους μαθητές συνολικά

Η διατύπωση και εξήγηση της αυτοομοιότητας με λόγια των μαθητών πραγματοποιήθηκε πολύ καλά σε σχεδόν όλα τα γυμνάσια. Ενδεικτικά: *Αυτοομοιότητα (όμοια γεωμετρικά σχήματα μέσα στο ίδιο το σχήμα).*

4.Δ. ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ SIERPINSKI

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο ΙΙ ο ορισμός της διάστασης εξαρτάται από την εκάστοτε μαθηματική οπτική (ευκλείδεια, τοπολογική διάσταση αυτοομοιότητας κ.λπ.). Σε μία προσπάθεια να γίνουν κατανοητά τα κλασματοειδή σχήματα, μαθηματικοί όπως ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής, ο Felix Hausdorff και ο Benoît B. Mandelbrot γενίκευσαν την διαισθητική έννοια της διάστασης για να περιλάβουν τις τιμές μη-ακέραιων αριθμών.

Στη δραστηριότητα Δ επιδιώκεται η εισαγωγή στη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski. Οι μαθητές της Γ΄ γυμνασίου έχουν διδαχθεί τις ευκλείδειες γεωμετρικές διαστάσεις, αλλά και τη σχέση τους με τον εκθέτη του λόγου ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων, απαραίτητες για τη δραστηριότητα προαπαιτούμενες γνώσεις.

Κατά τον Σπύρου Παναγιώτη τα παιδιά που δεν ασχολήθηκαν ποτέ με σχετικές δράσεις δεν καταφέρνουν να δομήσουν ποτέ την έννοια της αναλογικότητας (στο Κεΐσογλου, Σ. Σπύρου, Π. 2003).

Στη δραστηριότητα Δ, διαπιστώνεται από τους μαθητές ο ορισμός της διάστασης αυτοομοιότητας, με τη χρήση του λόγου ομοιότητας γνωστών σχημάτων από τα μαθηματικά τους. Στη συνέχεια γίνεται το ίδιο για το γνωστό από προηγούμενες δραστηριότητες τρίγωνο Sierpinski. Από τον πίνακα των διαστάσεων αναμένουμε να διαπιστωθεί τώρα όμως ότι η διάσταση αυτοομοιότητας στο τρίγωνο αυτό είναι δεκαδικός αριθμός.

4.1. Γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας.

Στην δραστηριότητα Δ επιδιώκεται η εισαγωγή στη μη ακέραια διάσταση αυτοομοιότητας (βλ. κεφάλαιο VII 1.10,11).

Στο πρώτο μέρος, ο γνωστικός στόχος είναι να διαπιστωθεί η αυτοομοιότητα μέσα από τη χρήση της ομοιότητας (και του λόγου ομοιότητας) σε γνωστά σχήματα με μια, δυο και τρεις διαστάσεις, καθώς και με το γνωστό από προηγούμενες δραστηριότητες τρίγωνο Sierpinski (κεφάλαιο VII 1.10). Επιδιώκεται η σύνδεση του λόγου αυτοομοιότητας με τη διάσταση αυτοομοιότητας και η αιτιολόγησή της. Επιπλέον διαπιστώνεται η δεκαδική φύση της διάστασης αυτοομοιότητας στο νέο τρίγωνο.

Στο δεύτερο μέρος, σημειώνεται στη γραφική παράσταση το σημείο της διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski στον άξονα των χ και διαπιστώνεται η άρρητη φύση καθώς και η συνέχεια του.

Στο τρίτο μέρος, με τη χρήση υπολογιστή τσέπης επιδιώκεται η εύρεση με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια της διάστασης του τριγώνου Sierpinski.

Η παραπάνω διαδικασία με τον συνδυασμό του λόγου αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski, με το γράφημα της διάστασης αυτοομοιότητας και με την προσέγγιση της άρρητης διάστασης με μάλιστα με ακρίβεια 0,01, είναι η δεύτερη καινοτομία της πρότασής μας.

4.2. Φύλο εργασίας.

Στη συνέχεια παρατίθεται το φύλλο της δραστηριότητας Δ της τελικής μας πρότασης, όπως δίνεται στους μαθητές:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Δ

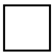
Ι. Λόγος αυτοομοιότητας

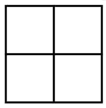
1. α. Το ευθύγραμμο τμήμα Β έχει διπλάσιο μήκος από το ευθύγραμμο τμήμα Α.

Τμήμα Α: ——   Τμήμα Β: ————

Πόσα τμήματα ίδια με το Α υπάρχουν στο τμήμα Β;

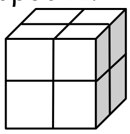
β. Η πλευρά του τετραγώνου Β είναι διπλάσια από την πλευρά του τετραγώνου Α.





Πόσα τετράγωνα ίδια με το Α έχουμε μέσα στο μεγαλύτερο τετράγωνο Β;

γ. Η πλευρά του κύβου Β είναι διπλάσια από την πλευρά του κύβου Α.



Πόσους κύβους ίδιους με τον Α έχουμε μέσα στον μεγαλύτερο κύβο Β;

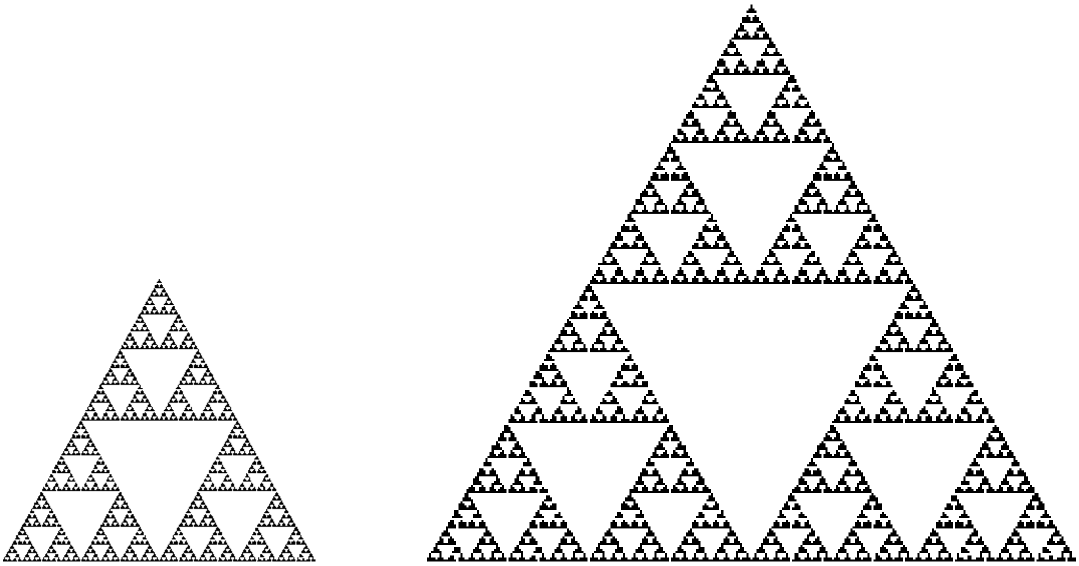
2. α. Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τον αριθμό των ίδιων κομματιών που βρήκες να δημιουργούνται και στη δεύτερη στήλη γράψε τον σε μορφή δύναμης, συμπληρώνοντας τον εκθέτη που λείπει.

ΣΧΗΜΑ	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ**	**Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΔΥΝΑΜΗΣ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΟΠΩΣ ΤΙΣ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**
Ευθεία		$2^{\square}$	1 (Μήκος)
Τετράγωνο		$2^{\square}$	2 (Μήκος και πλάτος)
Κύβος		$2^{\square}$	3 (Μήκος και πλάτος και ύψος)

Πίνακας 1

β. Τι διαπιστώνεις για τη σχέση εκθέτη και αριθμού των διαστάσεων;

3. Στο παρακάτω σχήμα το αριστερό τρίγωνο με πλευρά β δεν είναι παρά το κάτω αριστερά τρίγωνο του δεξιού τριγώνου που σχηματίζεται κατά τη διαδικασία δημιουργίας του τριγώνου Sierpinski. Το μήκος της πλευράς του τριγώνου στα δεξιά είναι πάλι διπλάσιο από το μήκος του τριγώνου στα αριστερά.



β *2β*

Σχήμα 1.

α. Πόσα τρίγωνα ίδια με το αριστερό τρίγωνο έχουμε τώρα στο εσωτερικό του δεξιού τρίγωνου;

Μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά:

Με διπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά στο εσωτερικό 3 ίδια τρίγωνα.

Στον Πίνακα 2 χρησιμοποιούμε τον γνωστό από τα μαθηματικά σου λόγο ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων.

ΣΧΗΜΑ	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ**	**ΛΟΓΟΣ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ**
Ευθ. τμήμα	2	$2 = (\frac{2}{1})^1$	1
Τρίγωνο Sierpinski	3	$3 = (\frac{2}{1})^χ$	
Τετράγωνο	4	$4 = (\frac{2}{1})^2$	2
Κύβος	8	$8 = (\frac{2}{1})^3$	3

Πίνακας 2

II. Γραφική παράσταση

Στο νέο φύλλο βλέπεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (\frac{2}{1})^{\chi}$.

Συμπλήρωσε στον οριζόντιο άξονα το χ του Πίνακα 2.

1. α. Τι διαπιστώνεις;

β. Ποιος αριθμός νομίζεις ότι είναι το χ στον εκθέτη της γραμμής που αντιστοιχεί στο τρίγωνο Sierpinski στον Πίνακα 2;

$\chi =$

γ. Ποιος νομίζεις ότι είναι ο αριθμός των διαστάσεων που αντιστοιχεί στο τρίγωνο Sierpinski;

δ. Αυτό που ισχύει για το ευθύγραμμο τμήμα, το τετράγωνο και τον κύβο, δηλαδή ότι ο αριθμός των διαστάσεών τους είναι ίσος με τον εκθέτη του λόγου αυτοομοιότητας, ισχύει και για το τρίγωνο Sierpinski. Επομένως, ο αριθμός των διαστάσεων του τριγώνου Sierpinski είναι ίσος με τον αριθμό χ που βρήκες. Τι νομίζεις ότι σημαίνει ότι ο αριθμός των διαστάσεων είναι δεκαδικός;

ε. Γιατί στον Πίνακα 2 αναγράφεται λόγος «αυτοομοιότητας»;

III. Διάσταση αυτοομοιότητας.

1. Είδαμε ότι η διάσταση του τριγώνου Sierpinski είναι ο εκθέτης χ στην παρακάτω **εξίσωση της διάστασης αυτοομοιότητας**

$$2^{\chi} = 3 \qquad (1)$$

η λύση της οποίας βρίσκεται μεταξύ 1 και 2:

$$1 < \chi < 2$$

Για να υπολογίσουμε με ακρίβεια τον χ μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία με τον υπολογιστή τσέπης:

α. Πάτησε το 2.

β. Πάτησε το $\boldsymbol{x^y}$*, που δίνει με τον τρόπο αυτό τη συνάρτηση* $\boldsymbol{2^x}$.

γ. Δώσε σαν εκθέτη έναν δεκαδικό αριθμό με όσα ψηφία θέλεις.

δ. Σημείωσε τον δεκαδικό στον παρακάτω πίνακα στη θέση του **χ** *και πάτησε το ίσον. Σημείωσε το αποτέλεσμα στην κάτω γραμμή του πίνακα.*

	$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$	$6^η$	$7^η$	$8^η$	$9^η$	$10^η$
Σημείωσα χ =										
Βρήκα 2^{χ} =										

Πίνακας 3.

ε. Κράτησε μόνο τα αποτελέσματα που πλησιάζουν αρκετά το 3, (όταν παράδειγμα είναι $2{,}9 < 2^{\chi} < 3{,}1$*) και διέγραψε τα υπόλοιπα.*

στ. Υπολόγισε τον μέσο όρο των χ που κράτησες.

1. α. Ποιο είναι το αποτέλεσμα που βρήκες;

2. Θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski;

3. Τι είδους αριθμός είναι το χ; Γνωρίζεις και άλλους αριθμούς με αυτή την ιδιότητα;

4.3. Οδηγίες προς τον καθηγητή.

Οι ερωτήσεις της πρώτης σελίδας (1), καθώς και οι καταγραφές (2) στον πίνακα 1 του φύλλου εργασίας είναι πολύ απλές και έχουν σκοπό τη σύνδεση με την ύλη των μαθηματικών τους, ειδικότερα την ταύτιση του εκθέτη ομοιότητας σχημάτων με τον αριθμό των γεωμετρικών του διαστάσεων.

Στην ερώτηση (3) διαπιστώνεται όμως ότι:

Στο τρίγωνο Sierpinski όμως το τετράγωνο του λόγου αυτοομοιότητας δεν αντιστοιχεί στο λόγω εμβαδού του τριγώνου γιατί το μεσαίο τρίγωνο έχει αφαιρεθεί.

Από τους μαθητές διαπιστώνεται (και στην επόμενη σελίδα των φύλλων εργασίας παρατίθεται, άσχετα αν στην προηγούμενη διαπιστώθηκε ή όχι) με έντονα γράμματα η διαδικασία (δηλ. ο αλγόριθμος) για το τρίγωνο Sierpinski:

Με διπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά στο εσωτερικό 3 ίδια τρίγωνα.

Εφόσον στο σημείο αυτό εξακολουθούν οι μαθητές να μην κατανοούν την διαδικασία εύρεσης του εκθέτη αυτοομοιότητας (στις διδακτικές παρεμβάσεις αυτό δεν συνέβη), μπορεί κατά την κρίση του καθηγητή να δοθεί πιο αναλυτικά το παράδειγμα που ακολουθεί:

με διπλασιασμό βάσης α = 2β

έχουμε λόγο ομοιότητας α /β = 2β /β =2

αλλά ο αριθμός των νέων τριγώνων που σχηματίζονται είναι 3, όχι 4:

Ισχύει:

$(α/β)^2 = (2/1)^2 \neq 3$, δηλαδή δεν πρόκειται για λόγο εμβαδών.

Ακόμη ισχύει:

$(α/β)^1 = (2/1)^1 \neq 3$, δηλαδή δεν πρόκειται για λόγο μηκών.

Εδώ έχουμε έναν άγνωστο εκθέτη χ με:

$(α/β)^χ = (2/1)^χ = 3$.

Προφανώς είναι:

$(2/1)^1 < 3 < (2/1)^2$ άρα

$(2/1)^1 < (2/1)^x < (2/1)^2$ άρα

$1 < χ < 2$

Το χ δεν είναι ακέραιος αριθμός. Στο λύκειο μαθαίνουμε πως υπολογίζεται ο χ. Εδώ μπορούμε να τον συμπληρώσουμε στον επόμενο πίνακα 2.

Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας δίνεται στους μαθητές σε φωτοτυπία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (\frac{2}{1})^χ$ και ζητείται να σημειωθούν τα αντίστοιχα σημεία του πίνακα 2 στον οριζόντιο άξονα. Με τον τρόπο αυτό ο άρρητος εκθέτης χ προσεγγίζεται στο 1,6 περίπου και διαπιστώνεται στο 1.α και 1.β η συνέχεια της συνάρτησης των εκθετών.

Στη συνέχεια αναμένεται στις ερωτήσεις 1.γ,δ,ε να καταγράψουν οι μαθητές και να αιτιολογήσουν κατά το δυνατόν την δεκαδική διάσταση αυτοομοιότητας του Sierpinski. Ειδικά στην ερώτηση 1. ε, αναμένεται η αυτούσια καταγραφή της «*διάστασης αυτοομοιότητας*».

Το τρίτο μέρος της δραστηριότητας εκτελείται στην τελική μορφή της πρότασης μόνο από δυο ομάδες. Κάθε ομάδα έχει έναν πανομοιότυπο υπολογιστή τσέπης που τον χειρίζεται ένας μαθητής. Η εμπειρία με περισσότερες ομάδες έδειξε ότι περισσότεροι υπολογιστές δεν προσφέρουν στο τελικό αποτέλεσμα και χάνεται πολύτιμος χρόνος με την εξοικείωση των μαθητών με τους υπολογιστές τζέπης. Συνήθως σχηματίζονται δυο μεγάλες ομάδες αυθόρμητα από τους μαθητές/τριες, η μια αγόρια και η άλλη κορίτσια (Chronaki. A. 2009), με ένα μόνο μαθητή ή μαθήτρια αρχηγό και με σχετική εμπειρία να χειρίζεται τον υπολογιστή τσέπης. Οι υπόλοιποι μαθητές και μαθήτριες προτείνουν στον/την αρχηγό τον αριθμό που κατά τη γνώμη τους ενδείκνυται και συμπληρώνουν τον πίνακα 3.

Η εμπειρία έδειξε ακόμη ότι δημιουργείται ανταγωνισμός αγοριών και κοριτσιών για το καλύτερο αποτέλεσμα (στο 1,α), συμβάλλοντας σημαντικά στην επιτυχία των γνωστικών στόχων της δραστηριότητας.

Στις ερωτήσεις 1 β, γ, αναμένεται να διαπιστωθεί η άρρητη φύση της διάστασης αυτοομοιότητας καθώς και να δοθούν παραδείγματα άρρητων αριθμών π.χ. π ή φ.

4.4. Σύνοψη αποτελεσμάτων.

Αν και οι ως άνω πίνακες ομοιότητας 1 και 2 συμπληρώνονται κατά κανόνα σωστά, δυσκολεύονται οι μαθητές να δεχτούν πως είναι δυνατό να υπάρχει μια δεκαδική διάσταση και μάλιστα άρρητη, σε αντίθεση με όσα είχαν διδαχθεί μέχρι τότε. Αυτό γίνεται αντιληπτό και από πολλές σχετικές καταγραφές, ενδεικτικά: *Δεν μπορούμε να βάλουμε αριθμό διαστάσεων επειδή ο αριθμός που βρήκαμε δεν είναι ακέραιος.*

Εκτός και αν γίνεται να μπει το 1,59…. άλλα δεν το έχουμε διδαχτεί ή *δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δεκαδικές διαστάσεις.*

Οι δισταγμοί των μαθητών και οι ως άνω καταγραφές περιοριστήκαν μετά την εισαγωγή του γραφήματος στο δεύτερο μέρος και ελαχιστοποιήθηκαν τελικά στο 25% περίπου μετά το τρίτο μέρος της δραστηριότητας Δ. Ενδεικτικά μια από τις τελικές καταγραφές:

Δεν υπάρχουν μόνο ακέραιες διαστάσεις η διάσταση 1,5.. βρίσκεται ανάμεσα στη διάσταση μήκος και στη διάσταση μήκος και πλάτος ή στη φύση υπάρχουν άπειρες διαστάσεις.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα Γ8 της ενότητας VII 3. που παρατίθεται ξανά εδώ:

Γυμνάσιο	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Από ομάδες	Ποσοστό	Διάσταση αυτοομοιότητας Sierpinski
3ο Κ	*Το νέο τρίγωνο δεν έχει φυσικούς αριθμούς στις διαστάσεις. Και στις άλλες εικόνες που είδαμε η διάσταση αυτοομοιότητας θα είναι δεκαδικός, άρρητος αριθμός*	8/13	62%	χ=1,5919975
4ο Κ	*Διάσταση δεν μπορεί να είναι μόνο 1, 2, 3 αλλά μεγεθύνοντας ένα σχήμα μπορεί να βρούμε και άρρητες διαστάσεις ανάμεσα. Ένα παράδειγμα: Μια λεπτή γραμμή έχει διάσταση 1 αλλά μπορεί να γίνει και πιο χοντρή και τότε 1 και κάτι, ανάμεσα από το ένα και το δύο*	8/11	73%	χ=1,5807
Επ	*Η διάσταση μπορεί να έχει συγκεκριμένη τιμή, μέτρο. Αλλά μπορεί να είχε την έννοια του άπειρου, της συνοχής*	8/9	89%	χ=1,6
Πγ2	*Οι διαστάσεις μπορεί να είναι ακέραιες ή δεκαδικές, δεν είμαστε σε θέση να το καταλάβουμε διότι εμπεριέχει την κίνηση και έχει άπειρες επαναλήψεις.*	7/12	58%	χ=1,585
Πγ1	*Οι διαστάσεις δεν είναι ακέραιες. Υπάρχει μια συνεχόμενη κίνηση. Υπάρχει*	7/9	78%	χ=1,585

	αυτοομοιότητα			
Μ2	*Επειδή το τρίγωνο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές αλλά ταυτίζεται με το αρχικό είναι άρρητος αριθμός*	9/11	82%	χ=1,585
Πγ2.09	*Γιατί ουσιαστικά είναι το ίδιο με τον εαυτό του με άρρητη διάσταση*	4/6	67%	χ=1,6
Πγ1.09	*Γιατί το τρίγωνο έχει επαναλαμβανομένη αυτοομοιότητα στο άπειρο*	3/6	50%	χ=1,585
Μ1	*Επειδή το τρίγωνου δεν έχει τέλος για αυτό και ο εκθέτης είναι δεκαδικός (άρρητος)*	7/9	78%	χ=1,585
5ο Β	*α. Τα νέα σχήματα είναι όμοια με το αρχικό με άρρητες νέες διαστάσεις β. Καινούρια διάσταση προφανώς. Διάσταση αυτοομοιότητας, γιατί είναι σχήμα όμοιο με τον εαυτό του.*	10/12	83%	χ=1,589

Πίνακας Γ8: Σύνδεση και αιτιολόγηση άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας, καθώς και η καλύτερη προσέγγιση της από τους μαθητές

Η διάσταση του τριγώνου Sierpinski προσεγγίστηκε πολύ ικανοποιητικά σε τάξη μεγέθους 0,01 σε όλα σχεδόν τα γυμνάσια. Οι 71 στις 98 ομάδες πραγματοποίησαν και αιτιολόγησαν την σύνδεση με τον λόγο αυτοομοιότητας του τριγώνου (πίνακας Γ8).

5. Ε. ΓΡΑΜΜΗ VON KOCH ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΗ CANTOR

“Η έννοια του μέτρου Hausdorff, με τη σειρά της, μας οδηγεί στην έννοια της διάστασης Hausdorff – Besicowitch, που είναι ακριβώς η πολύ γνωστή μας διάσταση ομοιότητας. Απλά, εδώ παρουσιάστηκε με τρόπο που να μην τρομάζει ο απλός κοσμάκης. Επομένως, αν αντέχετε το γεγονός ότι το μέτρο του συνόλου Cantor υπάρχει ακόμα κι αν εσείς δεν έχετε αυτή τη στιγμή τις γνώσεις που θα σας επέτρεπαν να διατυπώσετε τον ακριβή μαθηματικό ορισμό του, το μόνο που έχετε να κάνετε είναι να εκτελέσετε τους υπολογισμούς σας όπως παρουσιάζονται παραπάνω. Μ' αυτόν τον τρόπο θα οδηγηθείτε στη διάσταση ομοιότητας του συνόλου Cantor. Η διάσταση αυτή ονομάζεται: Η Fractal Διάσταση του συνόλου Cantor" (στο Μπακόπουλος Γ., *Fractals παντού και πάντα*).

Η επιλογή του τριγώνου Sierpinski δεν είναι η μόνη επιλογή για την εισαγωγή στην κλασματοειδή γεωμετρία. Για λόγους γενίκευσης των χαρακτηριστικών της νέας γεωμετρίας, κυρίως της διάστασης αυτοομοιότητας, ακολουθεί, όπως προαναφέρθηκε (στο κεφάλαιο VIII και IX) μια τελευταία δραστηριότητα με τις γραμμές von Koch και Cantor.

Η γραμμή von Koch (κεφάλαιο VII 1.12) προσφέρεται και αυτή για προσέγγιση των εννοιών της γεννήτριας και της διάστασης αυτοομοιότητας. Η γραμμή Cantor (κεφάλαιο VII 1.12) προσφέρεται για πολλές προτάσεις σχετικά με τη διδακτική της αξιοποίηση. Παρουσιάζει την ιδιαιτερότητα ότι η διάσταση αυτοομοιότητας της είναι μικρότερη από ένα, ή πολύ απλά οι επαναλήψεις του διαχωρισμού της σε ευθύγραμμα τμήματα τείνουν σε ένα σύνολο σημείων (σκόνη του Cantor) .

5.1. Γνωστικοί στόχοι της δραστηριότητας.

Ο πρώτος γνωστικός στόχος των νέων δραστηριοτήτων αναφέρεται στη σωστή σχεδίαση δυο επαναλήψεων των νέων σχημάτων όπως και με το τρίγωνο Sierpinski.

Στη συνέχεια αναμένεται από τους μαθητές η διατύπωση εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας. Όπως και στη προηγούμενη δραστηριότητα με το Sierpinski (*μοτίβο: με διπλασιασμό βάσης σχηματίστηκαν 3 ίδια κομμάτια*) οι μαθητές περιγράφουν την διαδικασία (δηλ. το μοτίβο) εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας των νέων σχημάτων Von Koch και Cantor. Με βάση το μοτίβο αυτό ακολουθεί πάλι όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα με το Sierpinski η διατύπωση της σχετικής εξίσωσης διάστασης αυτοομοιότητας από τους μαθητές.

Έχοντας την εξίσωση ακολουθεί με τη γνωστή διαδικασία με τους υπολογιστές τσέπης η προσέγγιση της διάστασης αυτοομοιότητας Von Koch και Cantor.

Ειδικότερα για την γραμμή Cantor αναμένεται από τους μαθητές να καταγράψουν τις διαφορές που διαπιστώνουν σε σχέση τα άλλα σχήματα που γνώρισαν. (Δηλαδή διάσταση $0<\chi<1$ ενώ στα άλλα σχήματα ήταν $\chi>1$. Ακόμη ότι με τη συνέχεια της διαδικασίας θα απομείνουν τελικά μόνο σημεία εκεί που ήταν η γραμμή κ.λπ.)

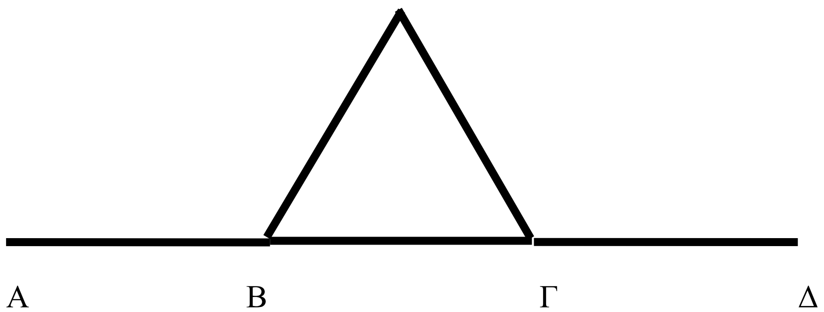
5.2. Φύλλα εργασίας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Ε.

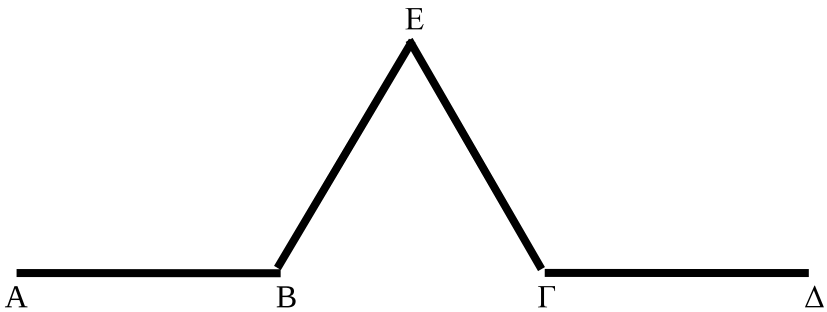
Ι. Θα δημιουργήσουμε τώρα ένα άλλο σχήμα. **(Γραμμή von Koch).**

Στην παρακάτω γραμμή ΑΔ βλέπουμε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.

Με βάση το τμήμα ΒΓ σχηματίζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο όπως παρακάτω.



Αφαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.



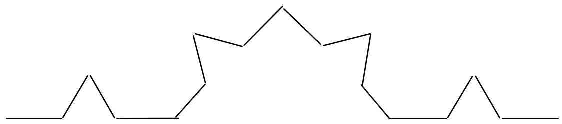
Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Δηλαδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα το χωρίζουμε σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα, με βάση το μεσαίο τμήμα σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο και αφαιρούμε τη βάση…κ.ο.κ. Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται γεννήτρια της γραμμής von Koch.

1. Σχεδίασε τις δυο επόμενες επαναλήψεις.

Διάσταση αυτοομοιότητας γραμμής von Koch

β



3β

Μελέτησε πάλι τη γεννήτρια της γραμμής von Koch, όπου το μήκος της γραμμής δεξιά είναι τριπλάσιο του μήκους της γραμμής αριστερά και θυμήσου πως σχηματίσαμε την εξίσωση (1) της διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski:

Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά 4 ίδια τμήματα.

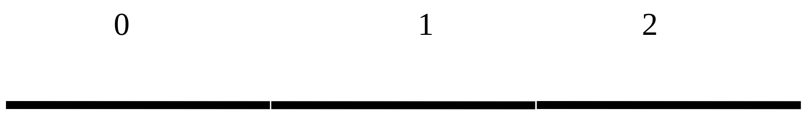
2. Σχημάτισε με τον τρόπο αυτόν την εξίσωση της διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής von Koch:

3.Υπολόγισε κατά προσέγγιση τον χ με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης.

$\chi =$

II. Γραμμή Cantor.

Την παρακάτω γραμμή την χωρίζουμε σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα και αριθμούμε το κάθε ευθύγραμμο τμήμα αρχίζοντας από το **0**.



Αφαιρούμε το μεσαίο ευθύγραμμο τμήμα.

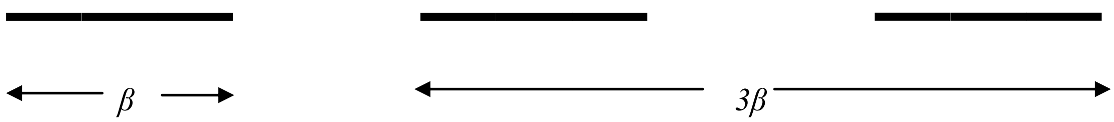
Και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται.

1. Σχεδίασε τις δυο επόμενες επαναλήψεις αριθμώντας τα ευθύγραμμα τμήματα από την αρχή με τον ίδιο τρόπο.

2. Πόσες φορές μπορεί να συνεχιστεί η παραπάνω διαδικασία;

3. Τι θα απέμενε τελικά ;

4. Σχημάτισε την εξίσωση της διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής Cantor με συλλογισμό ανάλογο με εκείνο που κάναμε στο τρίγωνο Sierpinski και στη γραμμή von Koch:



Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά 2 ίδια τμήματα, επομένως

$$3^{\chi} = 2.$$

6. Με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης υπολόγισε τη διάσταση αυτοομοιότητας της γραμμής Cantor.

$\chi =$

7. Διαφέρει το αποτέλεσμά σου από τις διαστάσεις των άλλων κλασματοειδών σχημάτων; Γιατί νομίζεις ότι συμβαίνει αυτό;

5.3. Οδηγίες προς τον καθηγητή.

Η διαδικασία εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας γίνεται πλέον χωρίς τη βοήθεια του καθηγητή, εξ ολόκληρου από τους μαθητές σε 2 βήματα:

α. Με υπενθύμιση της αντίστοιχης διαδικασίας για το τρίγωνο Sierpinski και μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων πριν και μετά την επανάληψη, ζητείται από τους μαθητές να βρουν τον αλγόριθμο των νέων σχημάτων. Δηλαδή να διατυπώσουν με δικά τους λόγια τη διαδικασία εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας

β. Στη συνέχεια ζητείται ο σχηματισμός της εξίσωσης διάστασης αυτοομοιότητας των νέων σχημάτων:

$3^{\chi} = 4$ για την γραμμή von Koch. «Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά 4 ίδια τμήματα».

$3^{\chi} = 2$ για την γραμμή Cantor. «Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματιστήκαν τελικά 2 ίδια τμήματα».

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σελίδα των φύλλων εργασίας δίνεται χωριστά με αυστηρή σειρά, έτσι ώστε να καταγράψουν οι μαθητές μόνοι τους, με δικά τους λόγια, τη διατύπωση του ορισμού της διάστασης αυτοομοιότητας, πριν δοθεί η επόμενη σελίδα.

Στη συνέχεια με τη γνωστή πια διαδικασία προσεγγίζονται οι διαστάσεις von Koch και Cantor.

Για το σύνολο Cantor στην ερώτηση τι θα απέμενε τελικά, καθώς και στην ερώτηση σε τι διαφέρει η διάσταση από τα άλλα σχήματα, αφήνονται οι μαθητές να καταγράψουν ότι νομίζουν χωρίς κάποια επεξήγηση από τον καθηγητή.

5. 4. Σύνοψη των αποτελεσμάτων.

Οι σωστές επαναλήψεις αλλά και καταγραφές της γραμμής von Koch και ειδικότερα της Cantor κινήθηκαν σε το ποσοστό 75- 100%. Ο υπολογισμός της διάστασης αυτοομοιότητας von Koch και Cantor ήταν και αυτός πολύ ικανοποιητικός (βλ. πίνακα Γ9, κεφάλαιο IX).

Γυμνάσιο	Σχεδίαση δυο επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας και σχηματισμός εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης von Koch	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
Πγ2	*9/12*	*9*	χ=1,269	χ=0,62	*Το αποτέλεσμα διαφέρει παρόλο που είναι όλοι άρρητοι αριθμοί διότι είναι μικρότερο της μονάδας. Αυτό συμβαίνει διότι το δεύτερο μέρος της εξίσωσης είναι μικρότερο από το πρώτο.*
Πγ1	*6/9*	*9*	χ=1,27	χ=0,62	*Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα από την αρχή*
Μ2	*10/11*	*11*	χ=1,265	χ=0,621	*Διαφέρει επειδή η τιμή της διάστασης είναι 0<χ<1 επειδή σχηματίζονται λιγότερα ιδία κομμάτια*
Πγ2.09	*4/6*	*6/6*	*1,27*	*0,6*	*Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα κατά 1/3.*

Πγ1.09	*5/6*	*6*	χ=1,265	χ=0,621	*Επειδή είναι το μόνο που αρχίζει από 0.6….*
Μ1	*7/9*	*9*	χ=1,265	χ=0,621	*Η διάσταση είναι 0<χ<1 επειδή τα κομμάτια γίνονται λιγότερα από τα αρχικά*
5ο Β	*10/12*	10	χ=1,26	χ=0,663	*Επειδή από τα 3 κομμάτια σχηματίστηκαν 2 ίδια*

Πίνακας Γ9: Σχεδιασμός von Koch και Cantor και εύρεσης διάστασης αυτοομοιότητας

Από τις αιτιολογήσεις τους στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η διαδικασία εύρεσης της διάστασης αυτοομοιότητας έγινε πια σε μεγάλο βαθμό κατανοητή από τους μαθητές. **Δε θεωρούμε καινοτομία τη δραστηριότητα Ε** της πρότασής μας επειδή στηρίζεται στην προηγούμενη δραστηριότητα, οφείλουμε όμως να τονίσουμε ότι τα αποτελέσματά της, με την ευκολία και ακρίβεια της διαπίστωσης της διάστασης αυτοομοιότητας Von Koch και Cantor, αλλά και τις αιτιολογήσεις των μαθητών πρωτόγνωρα στη σχετική έρευνα και ξεπέρασαν τις προσδοκίες μας.

Η γραμμή Cantor διασκέδασε τους μαθητές. Οι απαντήσεις τους είναι σχεδόν ταυτόσημες σε όλα τα γυμνάσια: *άπειρες βουλίτσες, τελίτσες σκόνη* κ.λπ. πολύ κοντά στον μαθηματικό ορισμό «σκόνη του Cantor».

6. Συμπεράσματα

Η τελική μας πρόταση αν και δεν αποκλείει τα αποτελέσματα των προηγούμενων σταδίων της έρευνας, προέκυψε στο τρίτο στάδιο έρευνας δηλαδή στην διερεύνηση των ετών 2006 έως 2009.

Η διδακτική πρόταση στην οποία καταλήξαμε -αποτέλεσμα της επεξεργασίας και ανατροφοδότησης των δεδομένων μας τύπου Θεμελιωμένης Θεωρίας -και αναφέρεται διεξοδικά στην ενότητα αυτή, εφαρμόστηκε πλέον χωρίς τροποποίηση για δυο έτη 2008 και 2009. Με βάση τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων δεν φαίνεται να μπορεί να βελτιωθεί περισσότερο. Επήλθε δηλαδή κατά τη γνώμη μας ο θεωρητικός κορεσμός της θεμελιωμένης θεωρίας.

Περαιτέρω αξιολόγηση της πρότασης μας παρατίθεται στο κεφάλαιο XI. Τα αποτελέσματα της όμως από τα 4 έτη της εφαρμογής της σε 15 γυμνάσια (τα δυο τελευταία έτη στην ολοκληρωμένη της μορφή), θετικά σε όλες τις παρεμβάσεις κρίνουμε ότι είναι ήδη αρκετά για την οριστική θεμελίωση της διδακτικής μας πρότασης.

Η διάρκεια της διδακτικής μας πρότασης είναι τελικά 4 διδακτικές ώρες, το ιδανικό είναι να πραγματοποιείται σε δυο συνεχόμενες ημέρες από δυο δίωρα. Δεδομένης της ανάγκης να έχουν διδαχτεί οι μαθητές τον λόγο ομοιότητας για τις ανάγκες των δραστηριοτήτων Δ, και Ε, και επειδή η εμπειρία των παρεμβάσεων έδειξε ότι ο λόγος ομοιότητας διδάσκεται συνήθως μετά το Μάρτιο, η πρόταση μας είναι να ενταχθεί η τελική μας πρόταση στο αναλυτικό πρόγραμμα της τάξης αυτής αμέσως μετά το σχετικό κεφαλαίο 1.6 του β μέρους της γεωμετρίας της Γ΄ γυμνασίου (σελ. 96).

http://digitalschool.minedu.gov.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-C104/68/542,2184

Κεφ. XI
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω αλλά και στην προηγούμενη ενότητα, η εξέλιξη της έρευνας ανέδειξε τρεις διαφορετικές φάσεις διερεύνησης: Έρευνα δράσης, σπουδή περίπτωσης και τελικά θεμελιωμένη θεωρία. Οι διαδικασίες αξιολόγησης της αρχικής μας έρευνας περιγράφονται στα κεφάλαια IV. 2 και V. 2. Στη συνέχεια η κύρια διερεύνηση στην εργασία μας έλαβε χώρα με τη Θεμελιωμένη Θεωρία τα έτη 2006, 2007, 2008, και 2009 με συνεχή ανατροφοδότηση αποτελεσμάτων. Έτσι η αξιολόγηση κάθε παρέμβασης ακολουθούσε άμεσα και όταν διαπιστωνόταν ανάγκη βελτίωσης η μορφή της παρέμβασης άλλαζε ανάλογα. Στο κεφάλαιο VIII αναλύονται χρονολογικά και στο κεφάλαιο IX αναλύονται συγκεντρωτικά όλες οι βελτιώσεις των παρεμβάσεων. Με τον τρόπο αυτό οι διδακτικές παρεμβάσεις των ετών 2006 και 2007 δεν είχαν την ολοκληρωμένη μορφή των διδακτικών παρεμβάσεων των ετών 2008 και 2009.

Παρά του ότι η διαδικασία αξιολόγησης υπήρξε με τον τρόπο αυτό συνεχής, επιδιώχθηκε κάποιας μορφής τελική αξιολόγηση στις παρεμβάσεις μας. Στο πρώτο πρώιμο μέρος της έρευνας των ετών 2006 και 2007, η αξιολόγηση είχε τη μορφή συνέντευξης με λίγες ομάδες μαθητών στο τέλος της σχολικής χρονιάς και σε περιορισμένο αριθμό γυμνασίων. Δεν υπήρχε η δυνατότητα παραχώρησης χρόνου μαθητών σε όλα τα γυμνάσια, κατά τη διάρκεια ή μετά τις εξετάσεις τους στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Στο δεύτερο μέρος της έρευνας των ετών 2008 και 2009, και αφού η μορφή της διδακτικής παρέμβασης είχε πια ολοκληρωθεί, η αξιολόγηση ακολουθούσε αμέσως μετά το τέλος κάθε διδακτικής παρέμβασης. Κατά τα έτη αυτά όλοι οι μαθητές έπαιρναν μέρος σε μια τυποποιημένη δραστηριότητα ταξινόμησης σχημάτων, που αποτελούσε και την τελική αξιολόγηση της παρέμβασης (Δραστηριότητα Ε, μέρος ΙΙΙ).

1. Έτη 2006 και 2007

Τελική αξιολόγηση πραγματοποιήθηκε με τη λήξη σχολικής χρονιάς 2006 και 2007 αντίστοιχα σε τρία από τα γυμνάσια στα οποία πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση. Δεν στάθηκε δυνατό να πραγματοποιηθεί σε περισσότερα γυμνάσια των παρεμβάσεων των ετών αυτών, λόγω του ότι είχαν ήδη εξαντληθεί τα περιθώρια έρευνας στα γυμνάσια αυτά, αλλά κυρίως λόγω της πληθώρας υποχρεώσεων της Γ΄ γυμνασίου στις τελευταίες εβδομάδες της σχολικής χρονιάς. Για τον ίδιο λόγο δεν στάθηκε δυνατό να συμμετέχουν όλοι οι μαθητές των τμημάτων της παρέμβασης.

Η τελική αξιολόγηση πραγματοποιήθηκε για τον παραπάνω λόγο στα γυμνάσια Ν. Μηχανιώνας και στα 6^{ο} και 5^{ο} γυμνάσια Καλαμαριάς. Πήραν μέρος μόνο 2 ομάδες από κάθε τμήμα (4 ή 5 μαθητές), απαντώντας χωριστά σε ερωτηματολόγιο αλλά και συζητώντας μετά (Watts, M. and Ebutt, D. 1987, Cohen, L. Manion, L. 1997). Έτσι ήταν δυνατή η σύγκριση των απαντήσεων τους στην αξιολόγηση, με τις καταγραφές της ομάδας στην παρέμβαση. Η διάρκεια της αξιολόγησης ήταν μια διδακτική ώρα, στην οποία οι μαθητές εργάστηκαν μόνοι τους απαντώντας σε οκτώ ερωτήσεις σχετικές με τη διδακτική μας παρέμβαση. Οι έξι πρώτες ερωτήσεις αφορούσαν τις έννοιες, βασικά χαρακτηριστικά και αρχές της μη γραμμικότητας όπως διδάχτηκαν στην παρέμβαση, αφορούσαν δηλαδή τη διαπίστωση της δυνατότητας ανάκλησης τους από τους μαθητές και το βάθος της επιτυχίας των σχετικών γνωστικών στόχων. Οι δυο τελευταίες ερωτήσεις αφορούσαν και συναισθηματικές, μεταγνωστικές ή επιστημολογικές προεκτάσεις. Οι απαντήσεις των μαθητών στις 8 ερωτήσεις της αξιολόγησης, παρουσιάζονται στη συνέχεια κατηγοριοποιημένες σε αντίστοιχους πίνακες ανά γυμνάσιο και με σύντομο σχολιασμό κάθε φορά:

1η ερώτηση. *Μπορείτε να περιγράψετε τι θυμόσαστε πιο έντονα από τη διδακτική μας παρέμβαση*;

Όλοι οι μαθητές θυμόταν τη διδακτική παρέμβαση στο μάθημα των μαθηματικών τους με έμφαση στο τρίγωνο Sierpinski (Γραμμή 1), στο παιχνίδι με το ζάρι (Γραμμή 2), στις εικόνες που είδαμε και στον τίτλου που τις δώσαμε (Γραμμή 3) ή σε κάτι άλλο (Γραμμή 4)

Γυμνάσιο Μηχανιώνας:

	Ευγενία	Λία	Ελένη	Μάρθα	Γιώργος
Το τρίγωνο	x	x	x		x

Sierpinski					
Το παιχνίδι με το ζάρι		x		x	x
Τις εικόνες και τον τίτλο που δώσαμε					
Άλλο					

Πίνακας 1.1 Τι θυμούνται οι μαθητές

6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

	Κατερίνα	Γιώργος	Κωνσταντίνος	Γιάννης
Το τρίγωνο Sierpinski	X		x	
Το παιχνίδι με το ζάρι	X	x	x	x
Τις εικόνες και τον τίτλο που δώσαμε		x		x
Άλλο				x

Πίνακας 1.2 Τι θυμούνται οι μαθητές

Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση του Γιώργου:

Περισσότερη εντύπωση μου προκάλεσε το παιχνίδι του χάους. Εκτός του ότι ήταν διασκεδαστικό εμφανίσαμε και το τρίγωνο Sierpinski, κάτι το οποίο δεν περίμενα.

Μια από τις απαντήσεις του Γιάννη αναφέρεται και στο τρίγωνο Pascal. Γενικά οι μαθητές του $6^{ου}$ γυμνασίου θυμόταν και κατέγραψαν πολλές λεπτομέρειες της παρέμβασης.

5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

	Σοφία	Κατερίνα	Χριστίνα	Γεωργία
Το τρίγωνο Sierpinski	X	x	x	x
Το παιχνίδι με το ζάρι		x	x	
Τις εικόνες και τον τίτλο που δώσαμε				
Άλλο				

Πίνακας 1.3 Τι θυμούνται οι μαθητές

2η ερώτηση: *Μπορείτε να περιγράψετε το παιχνίδι που παίξαμε*;

Το παιχνίδι στο μάθημα των μαθηματικών ονομάστηκε «παιχνίδι του χάους» από όλους τους παραπάνω μαθητές. Θυμόταν ότι παιζόταν με ζάρι και σημείωναν τυχαίες κουκίδες. Ακόμη όλοι ανέφεραν την εντύπωση που τους προκάλεσε η εμφάνιση στο διαφανειοσκόπιο.

3η ερώτηση: *Μπορείτε να σχεδιάσετε ξανά το τρίγωνο της παρέμβασης;*

Όλοι οι μαθητές ανεξαίρετα κατονόμασαν και σχεδίασαν σωστά το τρίγωνο Sierpinski.

4η ερώτηση: *Πώς λεγόταν τα γεωμετρικά σχήματα που γνωρίσαμε*;

Τα γεωμετρικά σχήματα που γνωρίσαμε στο μάθημα ονομάστηκαν fractal (8 απαντήσεις) ή κλασματοειδή σχήματα (7 απαντήσεις) από τους 13 μαθητές συνολικά που πήραν μέρος. Οι μαθητές του 6ου γυμνασίου κατέγραψαν και τις δυο ονομασίες.

5η ερώτηση: *Ποια ήταν τα βασικά χαρακτηριστικά των σχημάτων αυτών*;

Τα βασικά χαρακτηριστικά των σχημάτων αυτών (όπως τα διδάχτηκαν οι μαθητές στην παρέμβαση δηλαδή επαναληπτικότητα, αυτοομοιότητα, γεννήτρια, άρρητη διάσταση αυτοομοιότητας) δόθηκαν από τους μαθητές και κατηγοριοποιήθηκαν στον πιο κάτω πίνακα, σε κλίμακα από την 3η στήλη ως και την 7η στήλη, ανάλογα με πόσες σωστές απαντήσεις δόθηκαν. Καθόλου (0) , ελάχιστες (1), μέτριες (2) , αρκετές (3), πλήρεις (4) σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 2.1 Γυμνάσιο Μηχανιώνας:

Ομάδα	Μαθητής	Καθόλου 0	Ελάχιστες 1	Μέτριες 2	Αρκετές 3	Πλήρεις 4
1	Ευγενία				x	
1	Μάρθα				x	
2	Ελένη			x		
2	Λία			x		
2	Γιώργος			x		

Πίνακας 2.2.5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

Ομάδα	Μαθητής	Καθόλου	Ελάχιστες	Μέτριες	Αρκετές	Πλήρεις

		0	1	2	3	4
1	Σοφία					x
1	Γεωργία				x	
2	Κατερίνα					x
2	Χριστίνα					x

Πίνακας 2.3. 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

Ομάδα	Μαθητής	Καθόλου 0	Ελάχιστες 1	Μέτριες 2	Αρκετές 3	Πλήρεις 4
1	Κατερίνα				x	
1	Γιάννης				x	
2	Κωνσταντίνος				x	
2	Γιώργος				x	

Το 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς έχει τις πληρέστερες καταγραφές, δηλαδή του ορισμού των κλασματοειδών σχημάτων με αναφορά στην αυτοομοιότητα (που περιλάμβανε επαναληπτικότητα και γεννήτρια), καθώς και στην άρρητη διάσταση της.

6η ερώτηση. *Ποια είναι η διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski*;

Γενικά όλοι οι μαθητές θυμήθηκαν ότι ήταν δεκαδικός ή άρρητος αριθμός, μόνο όμως στο 5ο γυμνάσιο οι μαθητές ανακάλεσαν το αποτέλεσμα με ακρίβεια στην προσέγγιση.

Πίνακας 3.1 Γυμνάσιο Μηχανιώνας:

	Ευγενία	Λια	Ελένη	Μάρθα	Γιώργος
Δεκαδικός αριθμός	x			x	
Άρρητος αριθμός		x	x		x
Αναγραφή του αριθμού					
Άλλο					

Πίνακας 3.2 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

	Κατερίνα	Γιώργος	Κωνσταντίνος	Γιάννης
Δεκαδικός αριθμός				
Άρρητος αριθμός	x	x	x	x
Αναγραφή του αριθμού				

Άλλο				

Πίνακας 3.3 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς

	Σοφία	Κατερίνα	Χριστίνα	Γεωργία
Δεκαδικός αριθμός				
Άρρητος αριθμός				
Αναγραφή του αριθμού	x	x	x	x
Άλλο				

7η ερώτηση. *Τι σας έκανε μεγαλύτερη εντύπωση στην διδακτική μας παρέμβαση σε σχέση με το μάθημα των μαθηματικών σας;*

Στην ερώτηση τους έκανε εντύπωση από τη διδακτική μας παρέμβαση σε σχέση με το μάθημά τους των μαθηματικών, οι απαντήσεις των μαθητών αναφερόταν κυρίως στο παιχνίδι του χάους, αλλά και στις διδακτικές μεθόδους τη παρέμβασης:

4.1 Γυμνάσιο Μηχανιώνας:

	Ευγενία	Λια	Ελένη	Μάρθα	Γιώργος
Αναφορά στην αδυναμία πρόβλεψης του αποτελέσματος.	x		x		
Αναφορά στην εσωτερική τάξη του αποτελέσματος.					
Αναφορά στις διδακτικές μεθόδους της παρέμβασης					
Άλλο		x	x		

4.2 6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

	Κατερίνα	Γιώργος	Κωνσταντίνος	Γιάννης
Αναφορά στην αδυναμία πρόβλεψης του αποτελέσματος.			x	x
Αναφορά στην εσωτερική τάξη	x	x		

του αποτελέσματος.				
Αναφορά στις διδακτικές μεθόδους της παρέμβασης		x	x	x
Άλλο	x			

4.3 5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

	Σοφία	Κατερίνα	Χριστίνα	Γεωργία
Αναφορά στην αδυναμία πρόβλεψης του αποτελέσματος.	x	x	x	
Αναφορά στην εσωτερική τάξη του αποτελέσματος.		x		x
Αναφορά στις διδακτικές μεθόδους της παρέμβασης				x
Άλλο				

Οι καταγραφές των μαθητών σε όλα τα γυμνάσια αναφέρονται κύρια στην εσωτερική τάξη του αποτελέσματος του παιχνιδιού του χάους. Και από την ανάλυση των παρεμβάσεων προκύπτει ότι είναι το σημείο της παρέμβασης που κάνει τη μεγαλύτερη εντύπωση στους μαθητές. Αναφορικά με τις διδακτικές μεθόδους, η απάντηση του Γιώργου από το 6ο γυμνάσιο είναι ενδεικτική:

Η παρουσίαση στα μαθήματα που κάναμε ήταν πιο ευχάριστη, με εικόνες και παιχνίδια, αντίθετα με τη φυσική και τα μαθηματικά που είναι πιο μονότονα τα πράγματα.

8η ερώτηση. *Οι διαπιστώσεις της διδακτικής μας παρέμβασης στα μαθηματικά μπορούν να επεκταθούν και σε άλλες επιστήμες;*

Στην ερώτηση για το αν μπορούν να επεκταθούν σε άλλες επιστήμες οι διαπιστώσεις της παρέμβασης, οι απαντήσεις κατηγοριοποιούνται ως εξής:

Γυμνάσιο Μηχανιώνας:

	Ευγενία	Λια	Ελένη	Μάρθα	Γιώργος
Ισχύουν μόνο στις θετικές επιστήμες					
Πιθανόν να ισχύουν μερικώς σε άλλες επιστήμες	x	x		x	x
Ισχύουν σε όλες ή πρόκειται για επαναστατική αλλαγή σε όλες τις επιστήμες			x		
Άλλο					

6ο γυμνάσιο Καλαμαριάς:

	Κατερίνα	Γιώργος	Κωνσταντίνος	Γιάννης
Ισχύουν μόνο στις θετικές επιστήμες				
Πιθανόν να ισχύουν μερικώς σε άλλες επιστήμες		x	x	x
Ισχύουν σε όλες ή πρόκειται για επαναστατική αλλαγή σε όλες τις επιστήμες	x			
Άλλο				

5ο γυμνάσιο Καλαμαριάς

	Σοφία	Κατερίνα	Χριστίνα	Γεωργία
Ισχύουν μόνο στις θετικές επιστήμες				
Πιθανόν να ισχύουν μερικώς σε άλλες επιστήμες			x	
Ισχύουν σε όλες ή πρόκειται για επαναστατική αλλαγή σε όλες τις επιστήμες	x	x		x
Άλλο				

Είναι ενδιαφέρον ότι κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι οι διαπιστώσεις μας περιορίζονται μόνο στις θετικές επιστήμες ή μόνο στα μαθηματικά.

Στις παραπάνω απαντήσεις και από τις έννοιες της μη γραμμικότητας που χρησιμοποιήθηκαν στις παρεμβάσεις, οι μαθητές όλων των γυμνάσιων έκαναν συνήθως χρήση των εννοιών της έλλειψης προβλεψιμότητας, της χαοτικής εξέλιξης, της αυτοομοιότητας κ.λπ. Η έλλειψη της προβλεψιμότητας χρησιμοποιήθηκε από το 90% περίπου των μαθητών όμως συνοδευόταν από την τελική ύπαρξη κάποιας εσωτερικής τάξης της εξέλιξης ενός συστήματος.

Η παραπάνω αξιολόγηση είναι ενθαρρυντική κατά τη γνώμη μας γιατί οι μαθητές ανακάλεσαν αρκετά καλά τις έννοιες, τα βασικά χαρακτηριστικά και τις αρχές της μη γραμμικότητας που διδάχτηκαν στην δική τους διδακτική παρέμβαση, ένδειξη επιτυχίας των σχετικών γνωστικών στόχων και εννοιολογικών αλλαγών των μαθητών αυτών. Για τους λόγους που προαναφέρθηκαν όμως, η παραπάνω αξιολόγηση έχει μόνο μερική ισχύ και δε μπορεί να επεκταθεί με ασφάλεια σε όλες τις παρεμβάσεις των ετών 2006 και 2007.

2. Έτη 2008 και 2009

Η αξιολόγηση των γυμνασίων ετών 2006 και 2007 που προαναφέρθηκε δεν ήταν δομημένη με σαφήνεια (επειδή και η διδακτική παρέμβαση δεν είχε αποκρυσταλλωθεί τα έτη αυτά) και εφαρμόστηκε δειγματοληπτικά σε 3 γυμνάσια.

Αντίθετα, στα γυμνάσια των ετών 2008, 2009 η τελική αξιολόγηση πραγματοποιήθηκε στο τέλος κάθε παρέμβασης ενσωματωμένη στα οριστικά φύλλα εργασίας στο τελευταίο μέρος της τελευταίας δραστηριότητας (Ε. ΙΙΙ).

Ζητούσαμε από τους μαθητές την ταξινόμηση γνωστών σχημάτων της ευκλείδειας και (από την παρέμβαση) κλασματοειδούς γεωμετρίας (ευθύγραμμο τμήμα, σημείο, τρίγωνο, τρίγωνο Sierpinski γραμμή von Koch, κύκλος, τετράγωνο, σφαίρα, κύβος, κώνος) σε σχέση τη διάσταση αυτοομοιότητας τους *χ*, στον πίνακα Γ 10 του φύλλου εργασίας (κεφάλαιο ΙΧ 3.5.2.) που παρατίθεται ξανά στο σημείο αυτό:

ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	*ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ*						
		χ=0	0<χ<1	χ=1	1<χ<2	χ=2	2<χ<3	χ=3

Πίνακας Γ 10. Α, από το τελευταίο φύλλο εργασίας των μαθητών.

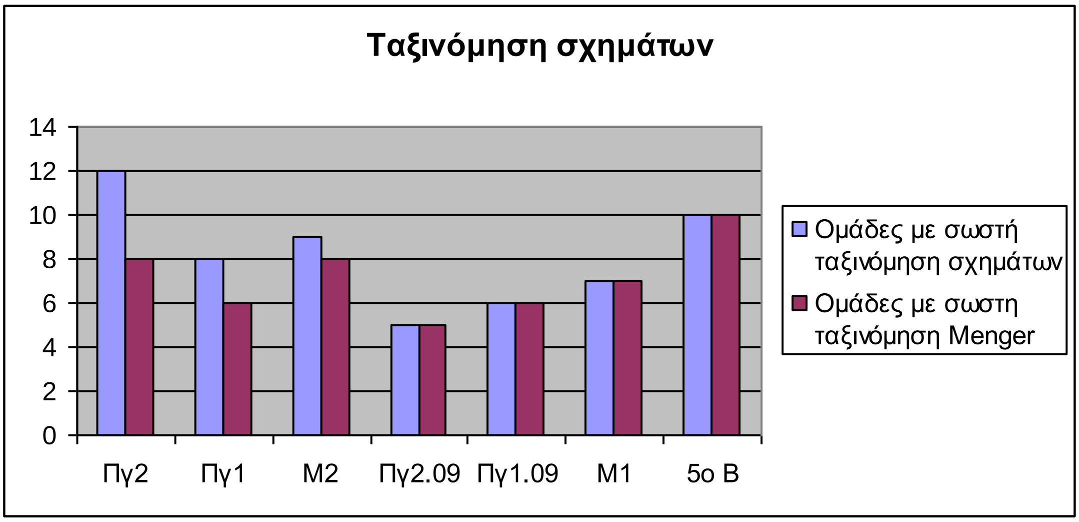
Ένα νέο σχήμα (*σφουγγάρι Menger κεφ.VIIα κωδικός 1.12 δ*) που πρώτη φορά βλέπουν οι μαθητές αναμένεται να σημειωθεί στην στήλη *2<χ<3*.

Συνολικά 58 στις 65 ομάδες των γυμνασίων των ετών αυτών ταξινόμησαν σωστά τα σχήματα. Αφού προβλήθηκε στο διαφανειοσκόπιο το σφουγγάρι Menger, ταξινομήθηκε σωστά από 51 στις 65 ομάδες.

Γυμνάσιο	Σωστή ταξινόμηση σχημάτων (ομάδες)	Ποσοστό σωστής ταξινόμησης σχημάτων	Σωστή ταξινόμηση σφουγγαριού Menger
Πγ2	12	100%	8
Πγ1	8	67%	6
Μ2	9	87%	8
Πγ2.09	5	83%	5
Πγ1.09	6	100%	6
Μ1	7	78%	7
5ο Β	10	83%	10

Πίνακας Γ10Β. Ταξινόμηση σχημάτων

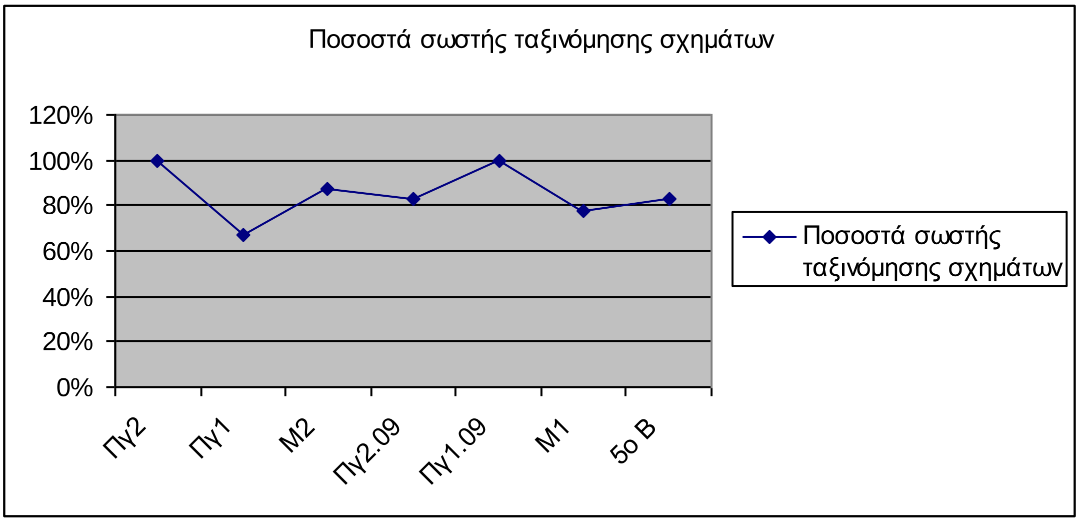
Συνήθως οι ίδιες ομάδες που αποτύγχαναν στην ταξινόμηση γνωστών σχημάτων αποτύγχαναν και στο σφουγγάρι Menger. Η αποτυχία αυτή περιορίστηκε σημαντικά το τελευταίο έτος των παρεμβάσεων 2009, όπου μόνο 5 ομάδες μαθητών δεν το ταξινόμησαν σωστά σε 4 συνολικά γυμνάσια, (βλ. διάγραμμα Γ9).



Διάγραμμα Γ9: Σύγκριση ομάδων σωστής ταξινόμησης γνωστών σχημάτων και σφουγγαριού Menger

Οι παραπάνω καταγραφές αποτελούν μια τελική ένδειξη για την επιτυχία των σχετικών με τη διάσταση αυτοομοιότητας γνωστικών στόχων των δραστηριοτήτων Δ, και Ε.

Το μέρος αυτό της δραστηριότητας Ε για την ταξινόμηση σχημάτων συμπεριλαμβανομένου και του σφουγγαριού Menger, είναι πολύ χρήσιμο σαν ένδειξη κατανόησης ή όχι της διάστασης αυτοομοιότητας, βασικού γνωστικού στόχου της παρέμβασης. Στο διάγραμμα Γ10 παρουσιάζεται το ποσοστό των ομάδων με σωστή ταξινόμηση σχημάτων συμπεριλαμβανόμενου του σφουγγαριού Menger σε κάθε γυμνάσιο:



Διάγραμμα Γ 10: Συγκεντρωτικά ποσοστά σωστής ταξινόμησης σχημάτων ευκλείδειας και fractal γεωμετρίας ανά γυμνάσιο τα έτη 2008, 2009

Το ποσοστό των ομάδων με σωστή ταξινόμηση κυμαίνεται από 80% έως 100% ανά κάθε γυμνάσιο, με μόνη εξαίρεση το πειραματικό γυμνάσιο Μακεδονίας το έτος 2008, όπου εμφανίζεται το μικρότερο ποσοστό: 70%.

Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα Χ. 1 (θεωρητικός κορεσμός) θεωρούμε ότι η διδακτική μας πρόταση είναι η βέλτιστη δυνατή και τα αποτελέσματά της επιβεβαιώνουν τη δυνατότητα διδακτικής αξιοποίησης της μη γραμμικότητας στην Γ΄ τάξη γυμνασίου, δηλαδή επιβεβαιώνουν την ερευνητική μας υπόθεση.

Κεφ. XII
Επίλογος

Η φιλόδοξη προσπάθεια της εργασίας αυτής, ήταν ακριβώς να φέρει την ομορφιά ακόμη πιο κοντά στην αλήθεια της μη γραμμικότητας στη διδασκαλία των θετικών επιστημών και αυτό όσο ήταν δυνατό νωρίτερα στην επιστημονική παιδεία των μαθητών μας.

Όμως στην πορεία της προσπάθειας μας αναπάντεχα εμπόδια και καθυστερήσεις, μικρά ή μεγάλα αναπόφευκτα ίσως λάθη στον σχεδιασμό ή στην εκτέλεση, σύμφωνα με την ίδια τη θεωρία μας μιλώντας μεταφορικά, γινόταν στη συνέχεια ολοένα και μεγαλύτερα, και οδηγούσαν την εργασία μας σε απρόβλεπτες τροχιές (κεφάλαιο II. 4.4.3). Μεταφορικά, θα μπορούσαμε να δούμε στα παραπάνω το φαινόμενο της πεταλούδας (κεφάλαιο II. 2.3):

Αν μια πεταλούδα κινήσει τα φτερά της στον Αμαζόνιο, μπορεί να φέρει βροχή στην Κίνα.

Δηλαδή μια απειροελάχιστη μεταβολή στη ροή των γεγονότων οδηγεί, μετά από την πάροδο αρκετού χρόνου, σε μια εξέλιξη της ιστορίας του συστήματος δραματικά διαφορετική από εκείνη που θα λάμβανε χώρα, αν δεν είχε συμβεί η μεταβολή.

Στην εξέλιξη της δικής μας έρευνας από το 2004 μέχρι το 2014, η πρώτη απρόβλεπτη μεταβολή στον αρχικό μας σχεδιασμό (κεφάλαιο III), ήταν η ανάδειξη της πολιτισμικής παραμέτρου στα πλαίσια της έρευνας δράσης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οι πιλοτικές παρεμβάσεις σε σχολεία της Γερμανίας το 2004, ήταν ίσως απαραίτητες για την ερευνά μας στο στάδιο αυτό (κεφάλαιο IV), ήταν όμως επίπονες στον σχεδιασμό και στην εφαρμογή τους και μας οδήγησαν πολύ μακριά από τον τελικό μας στόχο. Επιπλέον η διερεύνηση στο εξωτερικό δεν ολοκληρώθηκε για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο αυτό. Σε κάθε περίπτωση αν και πολλές πλευρές της παραπάνω διερεύνησης ήταν ενδιαφέρουσες, αποδείχθηκε ότι στα πλαίσια του στόχου μας η διερεύνηση στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση δεν ήταν δυνατή. Στη συνέχεια η έρευνα δράσης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (κεφάλαιο V), ανέδειξε με την αρχική διερεύνηση γνώσεων και απόψεων των μαθητών το 2005 απογοητευτικά αποτελέσματα. Ο σχεδιασμός της πιλοτικής μας παρέμβασης στην Γ΄ τάξη του γυμνασίου ήταν για το λόγο αυτό στα πλαίσια του στόχου μας συντηρητικός. Σε άλλη μια απρόβλεπτη εξέλιξη, τα πολύ καλά αποτελέσματα των πιλοτικών παρεμβάσεων το 2006 ανέτρεψαν τον συντηρητικό μας σχεδιασμό. Οι κύριοι γνωστικοί στόχοι πέτυχαν σε μεγάλο βαθμό και οι μαθητές ενθουσιάστηκαν.

Την παραπάνω αντίφαση ξεκαθάρισε το επόμενο στάδιο της έρευνας, η σπουδή περίπτωσης στο γυμνασίου Ν. Μηχανιώνας το 2006 (κεφάλαιο VI). Αποδείχθηκε ίσως η διδακτική παρέμβαση κλειδί για την εμβάθυνση στον τρόπο σκέψης των μαθητών και για τη συνέχεια της έρευνάς μας. Διαπιστώθηκε ότι όλοι οι γνωστικοί μας στόχοι, συμπεριλαμβανομένης και της απαιτητικής διάστασης αυτοομοιότητας, ήταν με τις κατάλληλες δραστηριότητες εφικτοί. Πολύ ενδιαφέρουσα υπήρξε και η διαθεματική γέφυρα με τη φυσική. Η περαιτέρω διερεύνηση της κατεύθυνσης αυτής όμως μας απομάκρυνε για δεύτερη φορά από τον τελικό μας στόχο, και επιπλέον τα πειραματικά μας μέσα αποδεδείχθηκαν ξανά περιορισμένα για ολοκληρωμένη διερεύνηση της διαθεματικής παραμέτρου.

Στη συνέχεια στο τρίτο και κύριο στάδιο έρευνας, η διερεύνηση τύπου Θεμελιωμένης Θεωρίας, σε μεγάλο αριθμό γυμνασίων (15 γυμνάσια σε Θεσσαλονίκη και Βόλο) υπήρξε εκτεταμένη αλλά αναγκαία για την στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων μας. Συμπεριλαμβάνει τις έννοιες που μας ενδιαφέρουν (κωδικοί), τις εξειδικευμένες έρευνες για τις σχετικές απόψεις των μαθητών, τους γνωστικούς στόχους των δραστηριοτήτων (κεφάλαιο VII). Ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων ανά γυμνάσιο χρονολογικά (κεφάλαιο VIII), καθώς και τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα (κεφάλαιο IX) και την επιλογή της τελικής πρότασης (κεφάλαιο X). Εξεταζόμενο εκ των υστέρων το στάδιο της Θεμελιωμένης Θεωρίας θα μπορούσε ίσως με την πληρότητά του να αποτελέσει τη μοναδική μεθοδολογική προσέγγιση και να καλύψει πλήρως την έρευνα. Αλλά πάλι χωρίς τις αρχικές φάσεις της έρευνας (έρευνα δράσης και σπουδή περίπτωσης) δε θα είχαμε προσανατολιστεί στους κωδικούς, στην τάξη της παρέμβασης και στους γνωστικούς στόχους μας που μας ήταν πλέον γνωστοί από την αρχή της Θεμελιωμένης Θεωρίας (κεφάλαιο VII), δε θα είχαμε εν τέλει προσανατολιστεί καν στην ίδια τη θεωρία. Ίσως να γινόταν και χωρίς τις προηγούμενες φάσεις της έρευνας, μα θα έπρεπε να ξεκινήσουμε με πολύ τύχη και χωρίς το παραμικρό ίχνος στα τυφλά την περιπλάνηση στην terra incognita του ερευνητικού μας στόχου.

Η διερεύνηση των ετών 2008-09 ανέδειξε καλύπτοντας όλους τους γνωστικούς μας στόχους, την απλή, όμορφη και περιεκτική κατά τη γνώμη μας τελική πρόταση διδακτικής αξιοποίησης της μη γραμμικότητας στη γενική εκπαίδευση στο κεφάλαιο X. Η πρότασή μας παρουσιάζει δυο καινοτομίες: α. Το παιχνίδι του χάους όπου οι μαθητές κατασκευάζουν οι ίδιοι με ζάρι και χάρακα την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος β. Τη διαδικασία προσέγγισης της άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski και της γραμμής von Koch και Cantor στη συνέχεια.

Η πρότασή μας δοκιμάστηκε στην πράξη όλα τα έτη 2008 και 2009 και λαμβάνοντας υπόψη τον συνεχή έλεγχο και τις ανατροφοδοτήσεις της διδακτικής μας παρέμβασης που προηγήθηκαν, καθώς και την τελική αξιολόγηση (κεφάλαιο XI), έχουμε τη γνώμη ότι περαιτέρω βελτίωση της διδακτικής μας πρότασης δεν είναι εφικτή.

Κατά τη διάρκεια της μακράς διερεύνησης μας ενδεχόμενα λάθη και ελλείψεις πιθανώς να διέφυγαν της προσοχής μας. Κάποια τμήματα της θεωρίας αναπόφευκτα και κατά την κρίση μας δε συμπεριλήφθηκαν (στο κεφάλαιο II και κεφάλαιο III) στη διδακτική μας έρευνα. Όλα τα στάδια της μεθοδολογικής μας προσέγγισης (κεφάλαια IV - VII), θα μπορούσαν ίσως να εξεταστούν λεπτομερέστερα από μια αυστηρά μεθοδολογική οπτική. Αυτό ισχύει ίσως περισσότερο για το τελευταίο στάδιο τύπου Θεμελιώδους Θεωρίας της έρευνας μας (κεφάλαια VII, VIII, IX) και τον θεωρητικό κατά τη γνώμη μας κορεσμό που οδήγησε στην τελική μας πρότασης (κεφάλαιο X). Η ίδια η πρόταση διδασκαλίας θα μπορούσε ίσως να βελτιωθεί περισσότερο από μια διδακτική-θεωρητική σκοπιά. Η πρόβλεψη της συγκεκριμένης ένταξης της πρότασής μας στο αναλυτικό πρόγραμμα πιθανώς να αλλάξει, (τα ίδια τα αναλυτικά προγράμματα άλλαξαν αρκετές φορές).

Στο μέγεθος της φιλόδοξης προσπάθειας μας, τα λάθη και οι απρόβλεπτες μεταβολές, είναι θα έλεγε κανείς, ευφυολογώντας κάπως, από την ίδια τη θεωρία της μη γραμμικότητας εξ ορισμού αναπόφευκτα. Με όλα τα ενδεχόμενα λάθη της, η εργασία άνοιξε κατά τη γνώμη μας ένα ακόμη παράθυρο στην αλήθεια και ομορφιά των θετικών επιστημών, αλλά και του γύρω μας κόσμου για τους μαθητές μας. Ένα παράθυρο που δεν θα κλείσει ξανά.

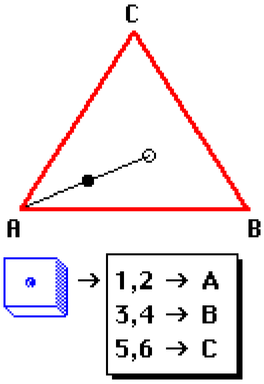
“Grau, teuer Freund, ist alle Theorie, und grün des Lebens goldner Baum „

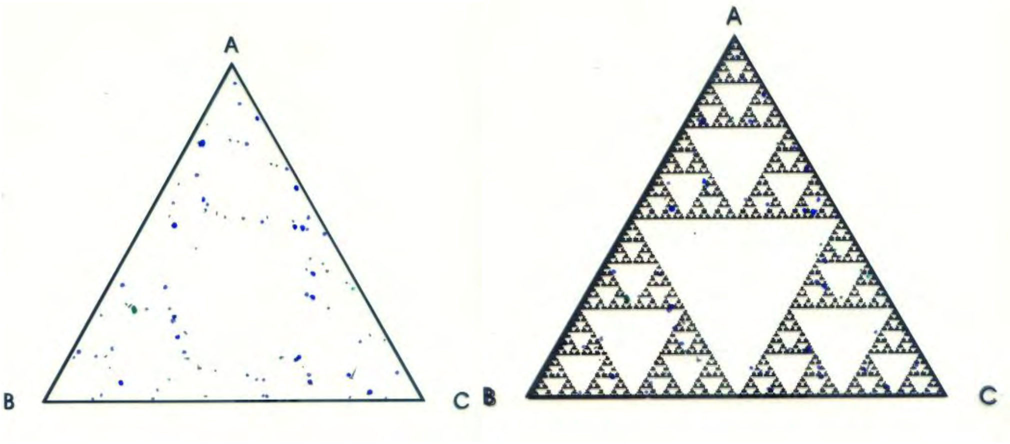
“Γκρίζα, ακριβέ μου φίλε είναι κάθε θεωρία, και πράσινο της ζωής το χρυσό δέντρο ” Goethe, Johann Wolfgang: Faust 2038-9.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Δείγμα εικόνων, προσομοιώσεων και έργων των μαθητών από την παρέμβασή μας

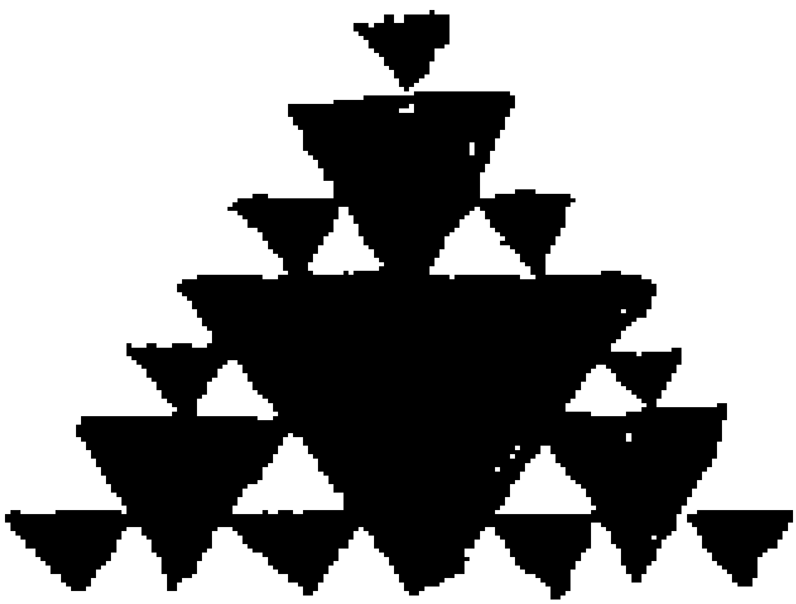
Από τη δραστηριότητα Α. Παιχνίδι του χάους

	ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ
	Οι κανόνες: 6. Διάλεξε ένα οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης **(ο)** στο τρίγωνο ABC. 7. Ρίξε το ζάρι. 8. **Σημείωσε το μέσο μιας νοητής γραμμής** προς το **A**, αν φέρεις **1** ή **2** , προς το **B**, αν φέρεις **3** ή **4**, προς το **C**, αν φέρεις **5** ή **6**. Αυτό είναι το νέο σημείο εκκίνησης σου. 9. **Επανάλαβε το βήμα 2.**

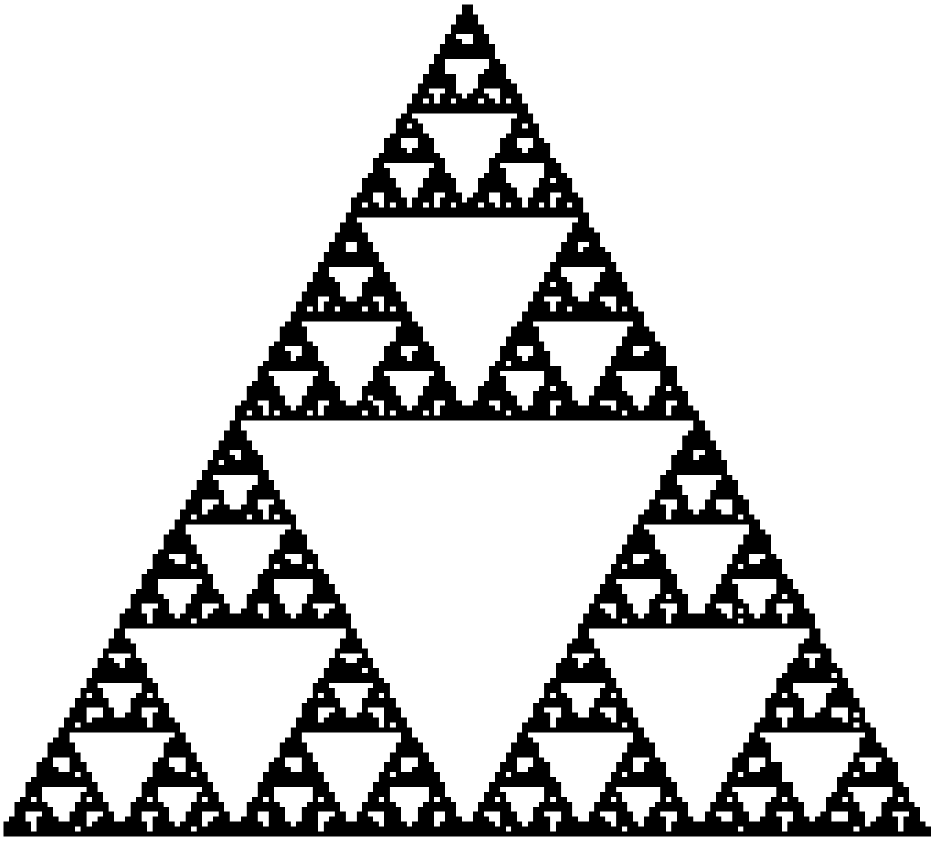


Ενδεικτικό αποτέλεσμα επικάλυψης επιφανειών στο 7ο Γυμνάσιο Καλαμαριάς

Από τη δραστηριότητα Β. Τρίγωνο Sierpinski

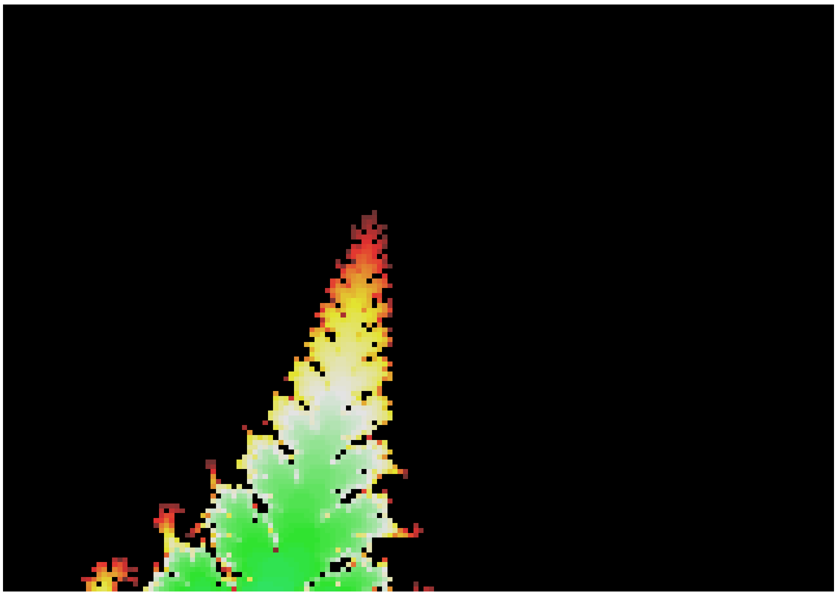


Δυο επαναλήψεις του τριγώνου Sierpinski από ομάδα μαθητών.

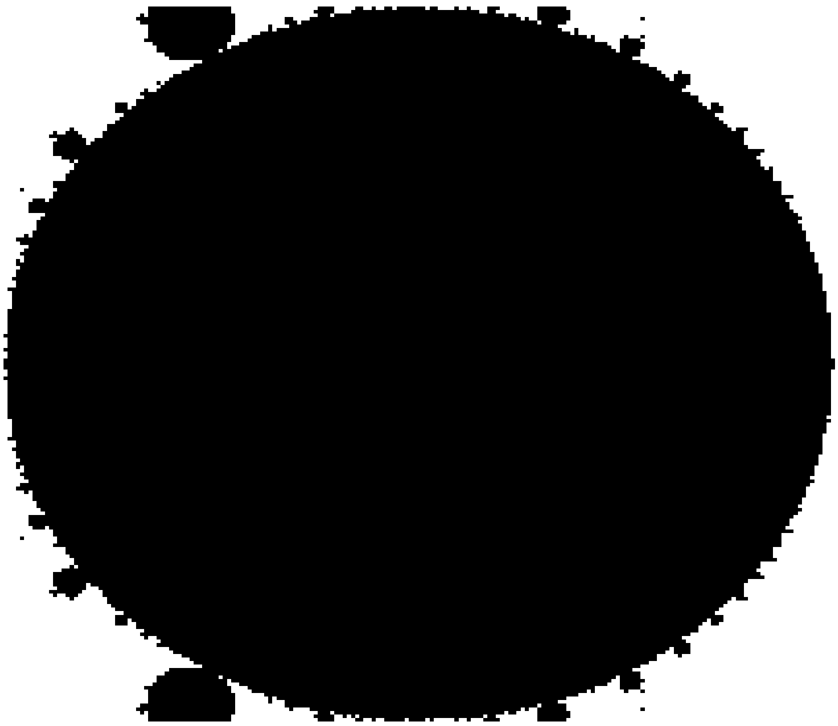


Τρίγωνο Sierpinski .gif

Από τη δραστηριότητα Γ . Προσομοιώσεις κλασματοειδών σχημάτων



Προσομοίωση 1.gif



Προσομοίωση 2 .gif

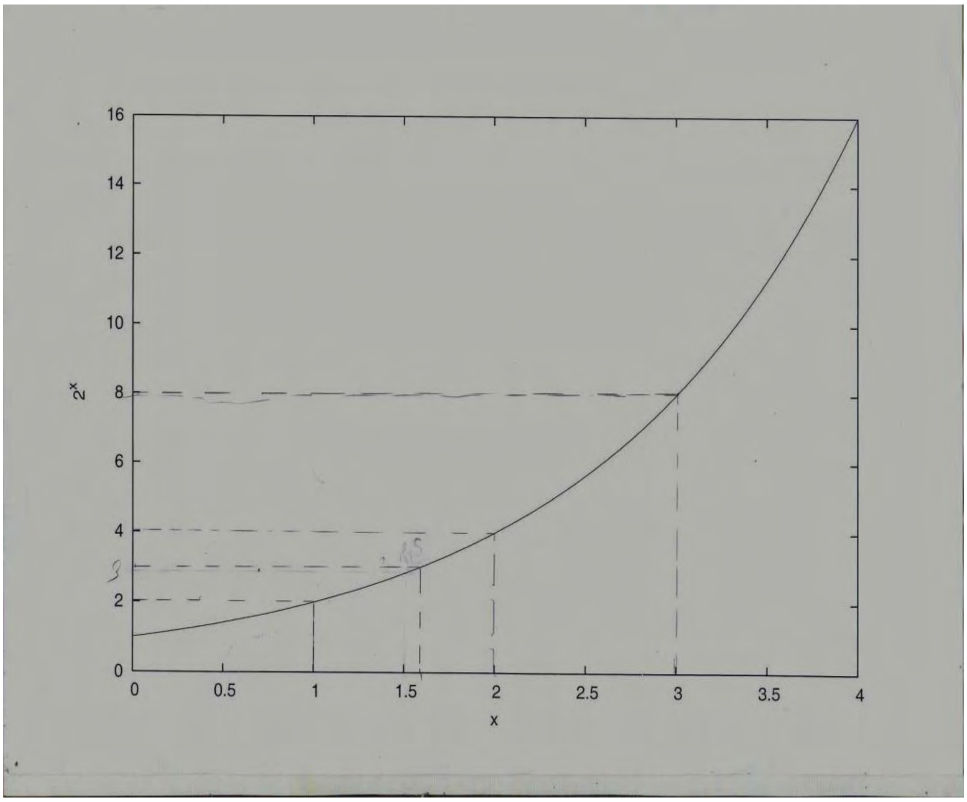
Broccoli Romanesco

Γυμνάσιο	Ονομασία εικόνων	Διατύπωση αυτοομοιότητας	Εφαρμογές στη φύση
7ο Β	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα σε τρισδιάστατες εικόνες.*	*Υπάρχει κάποιο σχήμα που επαναλαμβάνεται πολλές φορές μέχρι να γεμίσει το χώρο*	*Κουνουπίδι, έλατο*
Περ	-	-	-
5ο Κ	*Επαναλαμβανόμενες εικόνες*	-	-
7ο Κ	*Ατελείωτες αυτόμοιες εικόνες*	*Όμοιες με τον εαυτό τους*	*Εικόνες βασισμένες στη γεωμετρία στη φύση*
6ο Κ	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Αυτοομοιότητα (όμοια γεωμετρικά σχήματα μέσα στο ίδιο το σχήμα)*	*κουνουπίδι*
3ο Κ	*Βασίζονται σε ένα ομοιόμορφο μοτίβο ή σχήμα*	*ομοιόμορφο μοτίβο*	*Έλατο, τυφώνας*
4ο Κ	*Ατελείωτες εικόνες συμμετρικού χάους*	*Ατελείωτες όμοιες με τον εαυτό τους εικόνες*	*Έλατο*
Επ	*Τάξη στο χάος*	*Ένα σχήμα επαναλαμβάνεται και γεμίζει σιγά σιγά το χώρο*	*Έλατο, κουνουπίδι κ. λπ.*
Πγ2	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	*Επαναλαμβανόμενα μοτίβα*	*Έλατο, κουνουπίδι , σύμπιαν κ.λπ.*
Πγ1	*Συνεχής αυτοομοιότητα*	*Συνεχής αυτοομοιότητα, όμοια με τον εαυτό τους επαναλαμβανόμενα σχήματα*	*Μαίανδρος, έλατο, κουνουπίδι κ.λπ.*
Μ2	*Επαναλαμβανόμενη ομοιότητα*	*Χωρίς τέλος προέκταση της ομοιότητας*	*Το κουνουπίδι, τα φύλλα κάποιων δέντρων, κύτταρα, νιφάδες χιονιού*

			μικροοργανισμοί
Πγ2.09	*Εικόνες με όμοιες λεπτομέρειες*	*Σχήματα με όμοιες λεπτομέρειες*	*Μπρόκολο, σταλαγμίτης, κουκουνάρια, δέντρο*
Πγ1.09	*Εικόνες με επαναλαμβανόμενες λεπτομέρειες*	*'Όμοιες λεπτομέρειες επαναλαμβάνονται συνεχώς*	*Κουκουνάρια, μπρόκολο, αιμοσφαίρια*
Μ1	*Άπειρα επαναλαμβανόμενες αυτόμοιες εικόνες*	*Επαναλαμβανόμενες και όμοιες με τον εαυτό τους*	*Έλατο, (γενικά μερικά φυτά), το μπρόκολο, θάμνοι, το κοράλλι*
5ο Β	*Αυτοόμοιες*	*Αυτοόμοιες Ονομάζονται έτσι γιατί σε κάθε διαφάνεια εμφανίζεται ομοιότητα με το ίδιο το αρχικό*	*Το κοράλλι, τα φύλλα δέντρων, κύτταρα, κύματα της θάλασσας κουνουπίδι χόρτο σφουγγάρι*

Πίνακας Γ5: Κοινά χαρακτηριστικά εικόνων, ονομασία εικόνων, ορισμός αυτοομοιότητας και εφαρμογές στη φύση από τους μαθητές συνολικά

Από τη δραστηριότητα Δ. Διάσταση αυτοομοιότητας τριγώνου Sierpinski



Γράφημα Γ8: Εύρεση του εκθέτη λόγου αυτοομοιότητας από ομάδα μαθητών.

Γυμνάσιο	Σύνδεση με διάσταση αυτοομοιότητας	Από ομάδες	Ποσοστό	Διάσταση αυτοομοιότητας Sierpinski
3ο Κ	*Το νέο τρίγωνο δεν έχει φυσικούς αριθμούς στις διαστάσεις. Και στις άλλες εικόνες που είδαμε η διάσταση αυτοομοιότητας θα είναι δεκαδικός, άρρητος αριθμός*	8/13	62%	χ=1,5919975
4ο Κ	*Διάσταση δεν μπορεί να είναι μόνο 1, 2, 3 αλλά μεγεθύνοντας ένα σχήμα μπορεί να βρούμε και άρρητες διαστάσεις ανάμεσα. Ένα παράδειγμα: Μια λεπτή γραμμή έχει διάσταση 1 αλλά μπορεί να γίνει και πιο χοντρή και τότε 1 και κάτι, ανάμεσα από το ένα και το δύο*	8/11	73%	χ=1,5807
Επ	*Η διάσταση μπορεί να έχει συγκεκριμένη τιμή, μέτρο. Αλλά μπορεί να είχε την έννοια του άπειρου, της συνοχής*	8/9	89%	χ=1,6
Πγ2	*Οι διαστάσεις μπορεί να είναι ακέραιες ή δεκαδικές, δεν είμαστε σε θέση να το καταλάβουμε διότι εμπεριέχει την κίνηση και έχει άπειρες επαναλήψεις.*	7/12	58%	χ=1,585
Πγ1	*Οι διαστάσεις δεν είναι ακέραιες. Υπάρχει μια συνεχόμενη κίνηση. Υπάρχει αυτοομοιότητα*	7/9	78%	χ=1,585
Μ2	*Επειδή το τρίγωνο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές αλλά ταυτίζεται με το αρχικό είναι άρρητος αριθμός*	9/11	82%	χ=1,585
Πγ2.09	*Γιατί ουσιαστικά είναι το ίδιο με τον εαυτό του με άρρητη διάσταση*	4/6	67%	χ=1,6
Πγ1.09	*Γιατί το τρίγωνο έχει επαναλαμβανομένη αυτοομοιότητα στο άπειρο*	3/6	50%	χ=1,585

M1	*Επειδή το τρίγωνου δεν έχει τέλος για αυτό και ο εκθέτης είναι δεκαδικός (άρρητος)*	7/9	78%	χ=1,585
5ο Β	*α. Τα νέα σχήματα είναι όμοια με το αρχικό με άρρητες νέες διαστάσεις β. Καινούρια διάσταση προφανώς. Διάσταση αυτοομοιότητας, γιατί είναι σχήμα όμοιο με τον εαυτό του.*	10/12	83%	χ=1,589

Πίνακας Γ8: Σύνδεση και αιτιολόγηση άρρητης διάστασης αυτοομοιότητας, καθώς και η καλύτερη προσέγγιση της από τους μαθητές

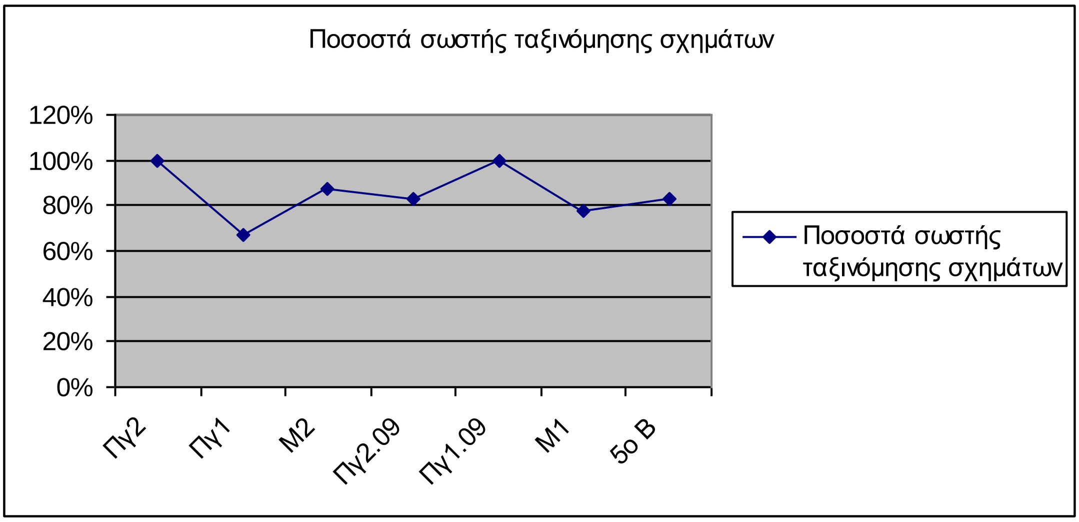
Από τη δραστηριότητα Ε. Διάσταση αυτοομοιότητας γραμμών von Koch και Cantor

Γυμνάσιο	Σχεδίαση δυο επαναλήψεων von Koch	Διατύπωση λόγου αυτοομοιότητας και σχηματισμός εξίσωσης	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης von Koch	Καλύτερη προσέγγιση διάστασης Cantor	Αιτιολόγηση διάστασης Cantor
Πγ2	*9/12*	*9*	χ=1,269	χ=0,62	*Το αποτέλεσμα διαφέρει παρόλο που είναι όλοι άρρητοι αριθμοί διότι είναι μικρότερο της μονάδας. Αυτό συμβαίνει διότι το δεύτερο μέρος της εξίσωσης είναι μικρότερο από το πρώτο.*
Πγ1	*6/9*	*9*	χ=1,27	χ=0,62	*Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα από την αρχή*
Μ2	*10/11*	*11*	χ=1,265	χ=0,621	*Διαφέρει επειδή η τιμή της διάστασης είναι 0<χ<1 επειδή σχηματίζονται λιγότερα ιδία κομμάτια*
Πγ2.09	*4/6*	*6/6*	*1,27*	*0,6*	*Επειδή τα κομμάτια είναι λιγότερα κατά 1/3.*
Πγ1.09	*5/6*	*6*	χ=1,265	χ=0,621	*Επειδή είναι το μόνο που αρχίζει από 0.6….*
Μ1	*7/9*	*9*	χ=1,265	χ=0,621	*Η διάσταση είναι 0<χ<1 επειδή τα*

					κομμάτια γίνονται λιγότερα από τα αρχικά
5ο Β	*10/12*	10	χ=1,26	χ=0,663	*Επειδή από τα 3 κομμάτια σχηματίστηκαν 2 ίδια*

Πίνακας Γ9: Σχεδιασμός von Koch και Cantor και εύρεσης διάστασης αυτοομοιότητας

Από την αξιολόγηση:



Διάγραμμα Γ 10: Συγκεντρωτικά ποσοστά σωστής ταξινόμησης σχημάτων ευκλείδειας και fractal γεωμετρίας ανά γυμνάσιο τα έτη 2008, 2009

Από την διαθεματική παράμετρο: Εκτέλεση πειράματος με μαγνητικό εκκρεμές

Από τις συνεντεύξεις:

Ελένη: *Οι μαγνήτες μας καθοδηγούν, «τραβάνε» προς τις κορυφές όπως είπε η Λία, με τον τρόπο που τις σημαδεύαμε με τον χάρακα στο μάθημα.*

Σε πυξίδα και μαγνήτη, ξέρουμε ότι αλλάζει κατεύθυνση (προς τον μαγνήτη) όμως δεν ξέρουμε πόσες φορές θα γυρίσει ο δείκτης πριν καταλήξει. Το μαγνητικό φάσμα ίσως είναι όπως οι γραμμές του τριγώνου Sierpinski. (Γιάννης).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Μαγνητικό εκκρεμές. Γυμνάσιο Ν. Μηχανιώνας Οκτώβρης 2006

1. ΠΡΩΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

α. Συνέντευξη:

Κατά τη συνέντευξη εμφανίστηκε η άποψη για τη δυνατότητα μας πρόβλεψης γεγονότων στη φύση, που εμφανίζεται και στη βιβλιογραφία. Ενδεικτικά:

Ναι γιατί η ανθρώπινη σκέψη ισχύει (Μάρθα), *υπάρχει γιατί μπορούμε από φυσικές ενδείξεις να υποθέτουμε την μελλοντική κατάσταση κάποιου αντικειμένου* (Γιώργος).

β. Πείραμα: Απλό εκκρεμές

Όλοι οι μαθητές (πλην του Γιώργου) συμφώνησαν πριν την εκτέλεση ότι η κίνηση του εκκρεμούς από κάποια συγκεκριμένη θέση είναι απόλυτα προβλέψιμη και σχεδίασαν ή περιγράψανε με ακρίβεια την προβλεπόμενη τροχιά. Ο Γιώργος είχε αντιρρήσεις για την τροχιά αλλά όχι το σημείο εκκίνησης και επιστροφής:

Ελένη προφορικά: *Μπορώ να προβλέψω την αιώρηση από κάθε αρχική θέση γιατί θα περάσει οπωσδήποτε από το κέντρο*.

Ερευνητής: *Και μετά*;

Ελένη προφορικά: *Μετά θα συνεχίσει ίσια ως το απέναντι σημείο και θα γυρίσει πάλι πίσω.*

Ερευνητής: *Συμφωνείτε όλοι*;

Μαθητές: *Ναι.*

Γιώργος: *Θα γυρίσει πίσω αλλά μπορεί όχι ίσια αλλά κυκλικά. Πάντως θα γυρίσει στο αρχικό σημείο.*

Ερευνητής: *Δείξε μου πώς ακριβώς; Δείξε μου με το δάχτυλο*.

Γιώργος: *Από εδώ ως εδώ. Πάλι στο αρχικό σημείο*.

Το εκκρεμές αφέθηκε από το ίδιο σημείο πολλές φορές και επιβεβαιώθηκε η πρόβλεψη των μαθητών της αιώρησης ανάμεσα στα απέναντι σημεία.

Επιλέχθηκε από την Ευγενία μια λίγο διαφορετική αρχική θέση. Οι μαθητές ανέφεραν ότι δεν αναμένουν κάτι διαφορετικό από πριν.

Μετά αφέθηκε πάλι το εκκρεμές από τη νέα θέση της Ευγενίας. Η Ευγενία έδωσε χωρίς να το θέλει ώθηση και υπήρξαν ενστάσεις από Λία και Ελένη ότι *δεν έπρεπε να δώσει δύναμη* και έπρεπε να επαναλάβει την άφεση. Αφέθηκε πάλι το εκκρεμές αυτή τη φορά χωρίς ώθηση. Διαπιστώθηκε ότι το εκκρεμές κάνει την ίδια κίνηση.

Ο Γιώργος διαπίστωσε ότι κινείται διαφορετικά από ότι είχε πει αρχικά γιατί είχε προβλέψει *ότι τώρα θα κινηθεί λίγο πιο κυκλικά. Πράγμα που δεν συνέβη*.

Η εξήγηση είναι ότι δεν του δίνουμε κάποια δύναμη ώστε οπότε και κάνει την ίδια κίνηση μπρος πίσω (Μάρθα), *γιατί το εκκρεμές κινείται μεταξύ του κέντρου και του αρχικού σημείου Α λόγω της κατεύθυνσης της ώθησης που του έχουμε δώσει*. (Ελένη, Ευγενία), *γιατί έτσι είναι ο νόμος της τροχιάς της αιώρησης*.(Λία)

Μετά από αρκετές επαναλήψεις διαπιστώθηκε και καταγράφηκε από όλους τους μαθητές ότι μικρές διαφορές στην αρχική θέση δεν επηρεάζουν σημαντικά την τροχιά αιώρησης.

Η αρχή της αιτιοκρατίας έγινε αντιληπτή από τους μαθητές ως εξής:

Όταν συμβαίνουν δυο παρόμοια γεγονότα, τα αποτελέσματά τους μοιάζουν. Αυτό δεν ισχύει μόνο στη φυσική αλλά και στη ζωή και την ιστορία. (Ελένη).

Ότι αν ξεκινήσει το εκκρεμές από ένα σημείο όμοιο με προηγούμενο θα κάνει την κίνηση που έκανε πριν, και ότι αν η τροχιά είναι που πριν είναι κυκλική θα είναι πάλι κυκλική. (Λία). *Αλλά και ότι η αρχή βασίζεται στην ταλάντωση*.(Γιώργος)

Ότι ίδιες αιτίες που συμβαίνουν στη φύση έχουν και τα ίδια αποτελέσματα. (Ευγενία) *ότι όλα είναι σχεδόν ίδια*. (Μάρθα).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η γενίκευση της αρχής όπως αναφέρεται στην απάντηση της Ελένης.

2. ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

α. Συνέντευξη:

Οι μαθητές κατέγραψαν τις απόψεις τους για την πιθανή κίνηση του μαγνητικού εκκρεμούς, συνδυάζοντας και τις γνώσεις που απέκτησαν στον πρώτο κύκλο. Η σημασία της έννοιας ευαίσθητη εξάρτηση από την αρχική θέση ταλάντωσης αποδόθηκε μετά από σχετική ερώτηση στη συνέντευξη:

Ότι το σώμα μπορεί εύκολα να ξεφύγει από την τροχιά που του έχει δοθεί. (Ελένη). *Ότι η τελική θέση εξαρτάται άμεσα και σε μεγάλο βαθμό από την αρχική.* (Λία).

β. Πείραμα: Μαγνητικό εκκρεμές

Πριν την εκτέλεση όλοι οι μαθητές συμφώνησαν ότι το βαράκι θα εκτελέσει συγκεκριμένη κίνηση:

Θα είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό είχε γίνει και χωρίς τους μαγνήτες. (Λία). Θα μείνει στην ίδια θέση ή θα περάσει από όλους τους μαγνήτες αλλά θα επιστρέφει σε αυτό που επιλέξαμε ως αρχική θέση. (Ευγενία) *Θα είναι ίσια με μικρότερη ταλάντωση γιατί οι μαγνήτες έχουν την ίδια δύναμη*. (Μάρθα). *Θα είναι κίνηση από τη θέση Α στο κέντρο (ευθεία) και αντίστροφα, και θα είναι συνεχώς επαναλαμβανόμενη.* (Ελένη, Γιώργος).

Μετά την εκτέλεση της ταλάντωσης όμως όλοι οι μαθητές διαπίστωσαν ότι η κίνηση του εκκρεμούς δεν ανταποκρίνεται στις προβλέψεις τους. Κατά την αιώρηση υπήρξαν επιφωνήματα και παροτρύνσεις προς το βαράκι να πάει τελικά εκεί που είχαν προβλέψει. Για μια στιγμή φάνηκε ότι τουλάχιστον θα κατέληγε στο σωστό πόλο, τελικά απομακρύνθηκε πάλι και κατέληξε αλλού. Η αιώρηση επαναλήφθηκε πολλές φορές γιατί κάθε μαθητής ήθελε να δοκιμάσει μια θέση από την οποία θα μπορούσε να προβλέψει τον πόλο κατάληξης. Τελικά παραιτήθηκαν γιατί δεν βρέθηκε τέτοια αρχική θέση.

Οι καταγραφές των μαθητών στο σημείο αυτό είναι αντίθετες από τις καταγραφές των ίδιων μαθητών για το απλό εκκρεμές και αντίθετες με ότι ανέμεναν ότι θα συμβεί. Όλοι οι μαθητές κατέγραψαν ότι η κίνηση δεν ήταν αυτή που είχαν προβλέψει. Αυτό συνέβη γιατί:

Εφόσον οι μαγνήτες είναι ίσοι θα περάσει και από τους τρεις, και ότι πηγαίνει από όλα τα σημεία (Ευγενία). *Ότι οι μαγνήτες έλκουν το βαρίδιο* (Μάρθα, Ευγενία). *Αυτό γίνεται γιατί είναι διαφορετική η δύναμη που ασκεί ο μαγνήτης σε κάθε σημείο*. (Ελένη). *Οι μικρές αλλαγές στις αρχικές θέσεις μπορεί να αλλάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα της αιώρησης*. (Ελένη). *Ότι οι μαγνήτες ασκούν δύναμη επάνω στο εκκρεμές και οι μικρές διαφορές το επηρεάζουν σημαντικά*. (Λία). *Γιατί το σημείο του (εκκρεμούς) βρίσκεται κοντά και στους άλλους μαγνήτες και κινείται κυκλικά σε όλα τα σημεία λόγω της έλξης των μαγνητών*. (Γιώργος).

Πιο αναλυτικά και σε σχέση με το προηγούμενο πείραμα τονίζεται ότι:

Οι μαγνήτες έλκουν και η κίνηση δεν είναι πια ίσια (Μάρθα), *ότι στην προηγούμενη το βαρίδιο έκανε μια συγκεκριμένη κίνηση τύπου: ↔, ενώ τώρα πηγαίνει κυκλικά.* (Ευγενία). *Οι μαγνήτες επηρεάζουν την αιώρηση έλκοντας το βαρίδιο, και έτσι η κίνηση είναι διαφορετική από την πρώτη δραστηριότητα.* (Ελένη). *Ότι όταν δεν υπήρχαν μαγνήτες μικρές διαφορές στην αρχική θέση δεν προκαλούσαν μεγάλες αλλαγές, ενώ τώρα που έχουμε μαγνήτες υπάρχουν σημαντικές μεταβολές* (Λία). *Διαπιστώνω ότι η κίνηση του εκκρεμούς εξαρτάται από τη δυναμική έλξη* (Γιώργος).

Διαπιστώθηκε από όλους η διαφορετική κίνηση του εκκρεμούς αλλά δεν αιτιολογήθηκε με τον ίδιο τρόπο. Η Λία και η Ελένη αναφέρθηκαν στην εξήγηση της επίδρασης των διαφορών της αρχικής θέσης. Τα παραπάνω δείχνουν ότι επήλθε γνωστική σύγκρουση και ανασχηματισμός αρχικής άποψης όλων των μαθητών για την πρόβλεψη της αιώρησης, αλλά μόνο η Ελένη και η Λία επιμένουν στην εξάρτηση από διαφορές στις αρχικές θέσεις. Χαρακτηριστικά **οι διαφορές στην αρχική θέση** αναφέρονται επί λέξη στις απαντήσεις της Ελένης και της Λίας:

Αυτό γίνεται γιατί είναι διαφορετική η δύναμη που ασκεί ο μαγνήτης σε κάθε σημείο. (Ευγενία). *Οι μικρές αλλαγές στις αρχικές θέσεις μπορεί να αλλάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα της αιώρησης*. (Ελένη). *Ότι όταν δεν υπήρχαν μαγνήτες μικρές διαφορές στην αρχική θέση δεν προκαλούσαν μεγάλες αλλαγές, ενώ τώρα που έχουμε μαγνήτες υπάρχουν σημαντικές μεταβολές* (Λία). *Διαπιστώνω ότι η κίνηση του εκκρεμούς εξαρτάται από τη δυναμική έλξη* (Γιώργος). Η Μάρθα δεν απάντησε.

Στη συνέχεια όλοι οι μαθητές συμφώνησαν ότι η αιτιοκρατία δεν ισχύει τώρα γιατί:

Οι μαγνήτες έλκουν (κατά την κίνηση του εκκρεμούς) με άλλοτε μεγαλύτερη ισχύ και άλλοτε μικρότερη (Μάρθα). *Γιατί υπάρχουν οι μαγνήτες που εμποδίζουν την εφαρμογή της αιτιοκρατίας.* (Ευγενία). *Γιατί υπάρχουν οι μαγνήτες που μεταβάλουν την εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες*. (Λία). *Γιατί υπάρχουν οι μαγνήτες που ενεργούν στο εκκρεμές με αλλαγές* (Γιώργος*). Γιατί υπάρχουν τα μαγνητικά πεδία που κάνουν την κίνηση του εκκρεμούς μη προβλέψιμη*. (Ελένη).

Γενικεύοντας οι μαθητές έκριναν ότι τα περισσότερα συστήματα στη φύση είναι μη προβλέψιμα γιατί:

Γιατί υπάρχουν πολλές δυνάμεις (παράλληλες) που επηρεάζουν τα γεγονότα με διαφορετική ισχύ και όχι σταθερά. Οι αρχικές συνθήκες μεταβάλλονται πολύ εύκολα και όχι προβλέψιμα. (Ελένη). *Γιατί η φύση ενεργεί με τρόπο ο οποίος δεν είναι προβλέψιμος και κάθε αλλαγή αλλάζει την τροχιά*. (Γιώργος). *Η φύση είναι μη προβλέψιμη επειδή οι παραμικρές αλλαγές προκαλούν τη μη προβλέψιμη εξέλιξη. Μη προβλέψιμες αρχικές συνθήκες.* (Λία). *Στη φύση δεν μπορεί να παρέμβει ο άνθρωπος και έτσι δεν μπορεί να προβλέψει τα φυσικά φαινόμενα*. (Ευγενία).

Ζητήθηκαν από τον ερευνητή κάποια παραδείγματα τέτοιων φυσικών φαινόμενων. Η απάντηση ήταν:

Καταιγίδες, ουράνια σώματα, σεισμοί.

Οι απαντήσεις στα τα παραπάνω δείχνουν ότι οι γνωστικοί στόχοι που αφορούσαν την αδυναμία πρόβλεψης της εξέλιξης της ταλάντωσης, επεκτάθηκαν από το σύνολο των μαθητών και σε δυναμικά συστήματα στη φύση. Αλλά η ευαίσθητη εξάρτηση της εξέλιξης από αρχικές συνθήκες εμφανίζεται μόνο στις απαντήσεις της Ελένης και της Λίας.

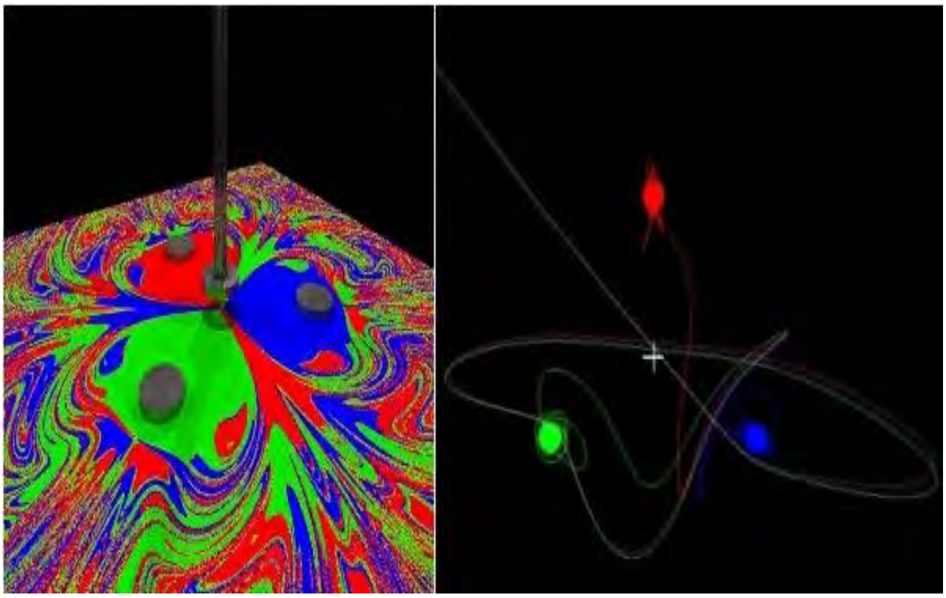
3. ΤΡΙΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ ΜΕ ΧΡΩΜΑΤΑ

α. Συνέντευξη:

Μετά τη γνωστική σύγκρουση που προηγήθηκε στον προηγούμενο κύκλο του πειράματος, οι μαθητές δίστασαν να απαντήσουν για κάποιας μορφής προβλεψιμότητα στα χρώματα του εκκρεμούς ή πιο γενικά για κάποια τάξη στο εσωτερικό του.

β. Πείραμα: Μαγνητικό εκκρεμές με χρώματα

Ακολούθησε νέα εκτέλεση του πειράματος μαγνητικού εκκρεμούς, αυτή τη φορά σημειώνοντας σε διαφάνειες με διαφορετικά χρώματα κάθε αρχική θέση. Τα χρώματα ήταν τρία σε σχέση με έκαστο πόλο κατάληξης. Οι διαφάνειες στο τέλος θα επικαλύπτονταν κατά την προβολή με τον ίδιο τρόπο όπως στο παιχνίδι του χάους της παρέμβασης. Το ιδανικό αποτέλεσμα θα ήταν να εμφανιστούν περιοχές με συγκέντρωση του αντίστοιχου χρώματος κοντά στον αντίστοιχο πόλο, περιοχές με εναλλασσόμενες συγκεντρώσεις ενός χρώματος σε κάποια απόσταση από αυτόν, και περιοχές χωρίς συγκεκριμένο χρώμα κυρίως στο κέντρο. Η εικόνα αυτή στην ιδανική περίπτωση θα προσέγγιζε χρωματιστή εικόνα περιοχών ευστάθειας και αστάθειας του μαγνητικού εκκρεμούς τύπου Υ, όπως προκύπτει σε προσομοίωση του πειράματος με χρήση Η.Υ. (κεφ. ΙΙ εν. 4.4.2 , Peitgen 1992b), θα παρουσίαζε δηλαδή εσωτερική δομή και αυτοομοιότητα.



Εικόνα 2: Αναμενόμενο αποτέλεσμα του πειράματος μαγνητικού εκκρεμούς με διαφορετικά χρώματα σε σχέση με τον πόλο κατάληξης

Το αποτέλεσμα δεν ήταν ωστόσο ιδανικό, γιατί η ακρίβεια σημειώσεων, η απλότητα της πειραματικής διάταξης και οι συνθήκες εκτέλεσης του πειράματος στον χώρο της βιβλιοθήκης πολύ απείχαν από το να είναι ιδανικές. Υπήρξε διαφωνία στις διαπιστώσεις των μαθητών, η συγκέντρωση χρωμάτων, παρατηρήθηκε από την Ελένη και τη Λία:

Τα χρώματα συγκεντρώνονται στους αντίστοιχους πόλους (Ελένη Λία). Τα πράσινα χρώματα βρίσκονται στον πράσινο πόλο (Λία).

Απόσπασμα από την απομαγνητοφώνηση:

Μάρθα, Λία, Ελένη: *Ναι φαίνεται ότι τα κίτρινα είναι εδώ, τα κόκκινα εδώ τα πράσινα εδώ.*

Ευγενία, Ελένη: *Τα πράσινα είναι σκορπισμένα.*

Λία*: Όχι δεν είναι, πρόσεξε εδώ και εδώ………* (μεγάλη παύση).

Ερευνητής: *Ωραία, συμφωνούμε τουλάχιστον όλοι ότι τα κίτρινα είναι συγκεντρωμένα;*

Όλοι: *Ναι.*

Ερευνητής: *Τα κόκκινα*;

Όλοι: *Τα κόκκινα είναι σκορπισμένα*.

Ερευνητής: *Τα πράσινα*;

Ελένη: *Τα πράσινα είναι σκορπισμένα*.

Λία: *Όχι, μόνο εδώ δεν φαίνονται να είναι μαζί*.

Ερευνητής: *Αν εξαιρέσουμε αυτή την περιοχή, είναι τα πράσινα συγκεντρωμένα;*

Ελένη: *Ναι, στον πράσινο πόλο*.

Ερευνητής: *Στην μέση υπάρχουν συγκεκριμένα χρώματα*;

Όλοι: *Όχι.*

Στη συζήτηση που ακολούθησε συμφώνησαν όλοι, ότι τελικά τα χρώματα παρουσιάζουν σημεία συγκέντρωσης κύρια κοντά στις αντίστοιχες κορυφές, πράγμα που φαίνεται καλύτερα στο κίτρινο χρώμα.

Τα κίτρινα είναι κοντά στο κίτρινο μαγνητάκι, κάποια πράσινα στο πράσινο, τα κόκκινα δεν έχουν κάποιο σημείο (Μάρθα), τα χρώματα συγκεντρώνονται στους πόλους (Λία), τα χρώματα συγκεντρώνονται κοντά στο σημείο με το κίτρινο χρώμα (Γιώργος), *τα κίτρινα βρίσκονται πιο κοντά στο σημείο Β, τα κόκκινα και τα πράσινα είναι σκορπισμένα αλλά και πάλι τα περισσότερα είναι στο Γ.* (Ελένη). *Τα πράσινα χρώματα βρίσκονται στην κορυφή Β*. (Ευγενία).

Με την εξαίρεση ίσως του κίτρινου χρώματος τα χρώματα δεν εμφάνισαν την συγκέντρωση χρωμάτων της ιδανικής εικόνας κοντά στους πόλους που προαναφέρθηκε, και δεν αναδείχθηκε εικόνα που να πλησιάζει την εσωτερική δομή της βιβλιογραφίας, πολύ περισσότερο δεν αναδείχθηκε η αυτοόμοια υφή της εσωτερικής δομής. Κατά συνέπεια δεν προέκυψαν ενδείξεις για οποιαδήποτε σύνδεση με το παιχνίδι του χάους της παρέμβασης. Παρόλα αυτά οι μαθητές αναζήτησαν από μόνοι τους σταθερά δεδομένα στις απαντήσεις τους για την κατανομή των χρωμάτων:

Υπάρχουν σταθερά σημεία. (Ευγενία, Μάρθα). *Γιατί οι τρεις πόλοι είναι τα σημεία που θα καταλήξει το εκκρεμές ανεξάρτητα από την αρχή*. (Γιώργος)

Θα σχηματιστεί κάτι σαν το τρίγωνο Sierpinski γιατί έχουμε συγκεκριμένα σημεία, δηλαδή πόλους, που είναι συγκεκριμένα 3. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε το χρώμα αλλά ξέρουμε σίγουρα ότι και οι τρεις πόλοι τραβάνε το εκκρεμές. (Λία)

Επειδή οι πόλοι τα σταθερά μας σημεία, μας καθοδηγούν που θα τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα. Παρόλα αυτά η κίνηση δεν είναι προβλέψιμη. (Ελένη).

Τα σταθερά σημεία που ανέφεραν οι μαθητές δεν επηρέασαν τις διαπιστώσεις τους για την έλλειψη προβλεψιμότητας. Αυτό είναι ένδειξη για το βάθος της εννοιολογική αλλαγής που επήλθε μετά το πείραμα στον δεύτερο κύκλο. Χαρακτηριστική εδώ η απάντηση της Ελένης: *Παρόλα αυτά η κίνηση δεν είναι προβλέψιμη.*

Η απάντηση της Λίας: **Θα σχηματιστεί κάτι σαν το τρίγωνο Sierpinski γιατί έχουμε συγκεκριμένα σημεία, δηλαδή πόλους, που είναι συγκεκριμένα 3. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε το χρώμα αλλά ξέρουμε σίγουρα ότι και οι τρεις πόλοι τραβάνε το εκκρεμές,** είναι η επιδιωκόμενη σύνδεση με το παιχνίδι του χάους της παρέμβασης, ωστόσο είναι μάλλον αυθαίρετη γιατί στηρίζει τη σύνδεση στο κοινό χαρακτηριστικό του εξωτερικού ισόπλευρου τριγώνου και όχι σε περιοχές συγκέντρωσης σημείων ή χρωμάτων. Τελικά η Ελένη σκέφτηκε ότι:

Ελένη: **Οι μαγνήτες μας καθοδηγούν, «τραβάνε» προς τις κορυφές όπως είπε η Λία, με τον τρόπο που τις σημαδεύαμε με τον χάρακα στο μάθημα.**

4. 4. Μεταγνωστικές διαπιστώσεις

Οι απόψεις των μαθητών για τον κόσμο και την επιστήμη μετά τα παραπάνω είναι ότι:

Η επιστήμη δεν θα μπορέσει να προβλέψει απόλυτα τα φαινόμενα. (Ελένη). *Αυτό που κάναμε στις δραστηριότητες είναι σαν να το κάναμε σε επιστημονικά εργαστήρια. Όμως δεν μπορούν (οι επιστήμονες) να προβλέψουν τι θα γίνει στο τέλος.* (Μάρθα). *Στο εργαστήριο εφαρμόζονται διάφορα παρόμοια πράγματα (πειράματα) από τα οποία βγάζουμε συμπεράσματα. Δεν μπορούνε ούτε θα μπορέσουνε κάποτε να το προβλέψουνε* (Γιώργος). *Ναι αφού το πείραμα που κάναμε εδώ είναι κάτι το οποίο εφαρμόζεται και στα επιστημονικά εργαστήρια. Όμως δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το τι θα ακολουθήσει στη φύση.* (Λία) *Αφού το εκκρεμές είναι ένα φυσικό παράδειγμα. Έχουμε αιώρηση πράγμα που υπάρχει στη φύση και δυνάμεις που και αυτό υπάρχει στη φύση* (Λία). *Εφαρμόζονται διάφορα πειράματα αλλά δεν μπορούν οι επιστήμονες να προβλέψουν με ακρίβεια το τι θα συμβεί στο μέλλον* (Ευγενία).

Σχεδόν σε όλες τις απαντήσεις εμφανίζεται η αδυναμία πρόβλεψης η οποία επεκτείνεται στην αδυναμία πρόβλεψης στην επιστήμη και στη φύση (*γιατί όλα αυτά είναι μέρος της φύσης*).

Οι καταγραφές αυτές είναι αντίθετες με τις αρχικές απόψεις των μαθητών για προβλεψιμότητα στη φύση όπως καταγράφηκαν στη συνέντευξη. Μέσα στο σύνολο των απαντήσεων για την έλλειψη προβλεψιμότητας η Ελένη αναφέρθηκε σε συγκεκριμένους σχηματισμούς με fractal σχήματα στη φύση (*κυρίως σε φυτά*) αλλά και σε ανθρώπινες κατασκευές (*δημιουργούνται εσκεμμένα*). Η απάντησή της παραπέμπει στην αντίστοιχη δραστηριότητα της παρέμβασης και δεν είναι ασφαλές να γενικευθεί περισσότερο, εξ άλλου και η ίδια αναφέρει με επιφύλαξη (*κυρίως σε φυτά*) και (*δημιουργούνται εσκεμμένα*).

Οι τελευταίες απαντήσεις των μαθητών αναφέρονται γενικότερα στις επιστημολογικές προεκτάσεις της μη γραμμικότητας, μια σημαντική παράμετρος για τη διδακτική αξιοποίηση εννοιών της μη γραμμικότητας όπως προαναφέρθηκε (βλ. κεφ. ΙΙ 1.1). Οι επιστημολογικές προεκτάσεις της μη γραμμικότητας αποτελούν ενδεχομένως μια νέα προσέγγιση και ευρύ πεδίο διερεύνησης, που ξεπερνά όμως το πλαίσιο του στόχου της έρευνας μας.

Φύλλο εργασίας του/της…………………………………………………………………...

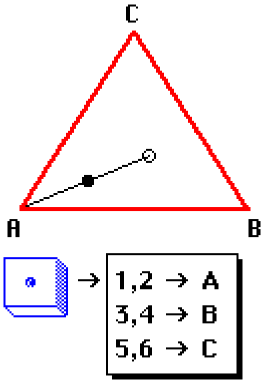
Τμήματος………………………………….. Γυμνασίου……………………………….

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Α

1. α. Διάβασε προσεχτικά τους κανόνες του παιχνιδιού. Αν επαναλάβουμε αρκετές φορές το βήμα 2, τι νομίζεις ότι θα συμβεί;

β. Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ



Οι κανόνες:

10. Διάλεξε ένα οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης **(ο)** στο τρίγωνο ABC.

11. Ρίξε το ζάρι.

12. **Σημείωσε το μέσο μιας νοητής γραμμής**

    προς το **A**, αν φέρεις **1** ή **2** ,
    προς το **B**, αν φέρεις **3** ή **4**,
    προς το **C**, αν φέρεις **5** ή **6**.
    Αυτό είναι το νέο σημείο εκκίνησής σου.

13. **Επανάλαβε το βήμα 2.**

2. Πως θα χαρακτηρίζατε τις κουκίδες στη διαφάνειά σας;

α. Σκόρπιες.

β. Συγκεντρωμένες σε μια περιοχή.

γ. Συγκεντρωμένες σε πολλές περιοχές.

δ. Άλλο.

3. Πως θα χαρακτηρίζατε τις κουκίδες όλων των διαφανειών της τάξης σας;

α. Σκόρπιες.

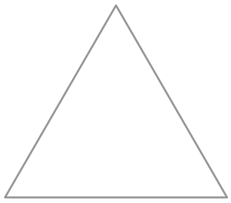
β. Συγκεντρωμένες σε μια περιοχή;

γ. Συγκεντρωμένες σε πολλές περιοχές;

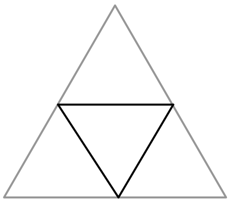
δ. Άλλο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Β

Ι. 1. Το αρχικό τρίγωνο (σχήμα Α) το χωρίζουμε σε 4 ίσα τρίγωνα (όπως στο σχήμα Β). Μαυρίζουμε την επιφάνεια του μεσαίου (δηλαδή του αντεστραμμένου τριγώνου), θεωρώντας ότι η επιφάνειά του έχει κοπεί και αφαιρεθεί από την επιφάνεια του τριγώνου. Πόσα λευκά τρίγωνα παραμένουν στο εσωτερικό του τριγώνου;



(Σχήμα Α)



(Σχήμα Β)

Επανάλαβε την παραπάνω διαδικασία άλλες δυο φορές.

2. α. Πόσες φορές κατά τη γνώμη σου μπορεί να συνεχιστεί η παραπάνω διαδικασία;

β. Τι διαπιστώνεις να συμβαίνει κατά την επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας;

3. Στην οθόνη του υπολογιστή βλέπουμε και άλλες επαναλήψεις (εδώ η κομμένη επιφάνεια εμφανίζεται άσπρη). Πώς θα περιέγραφες τη διαδικασία και το αποτέλεσμά της στην οθόνη του υπολογιστή;

Α. 4. Ποιο σχήμα σχηματίστηκε τελικά από όλες τις διαφάνειες μαζί;   Γιατί κατά τη γνώμη σου έγινε αυτό;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Γ

1. Στον υπολογιστή βλέπουμε επαναλήψεις και άλλων σχημάτων. Παρατήρησε ακόμη τις συνοδευτικές εικόνες στο διαφανοσκόπειο, ακούγοντας και τη μουσική. Ποια νομίζεις ότι είναι τα κοινά χαρακτηριστικά τους;

2. Τι ονομασία θα μπορούσαμε να δώσουμε στις εικόνες αυτές; Γιατί;

3. Υπάρχουν σχήματα στη φύση που να περιγράφονται με τον παραπάνω τρόπο;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Δ

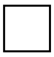
Ι. Λόγος αυτοομοιότητας

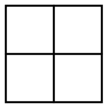
1. α. Το ευθύγραμμο τμήμα Β έχει διπλάσιο μήκος από το ευθύγραμμο τμήμα Α.

Τμήμα Α: ——   Τμήμα Β: ————

Πόσα τμήματα ίδια με το Α υπάρχουν στο τμήμα Β;

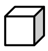
β. Η πλευρά του τετραγώνου Β είναι διπλάσια από την πλευρά του τετραγώνου Α.

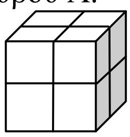




Πόσα τετράγωνα ίδια με το Α έχουμε μέσα στο μεγαλύτερο τετράγωνο Β;

γ. Η πλευρά του κύβου Β είναι διπλάσια από την πλευρά του κύβου Α.





Πόσους κύβους ίδιους με τον Α έχουμε μέσα στον μεγαλύτερο κύβο Β;

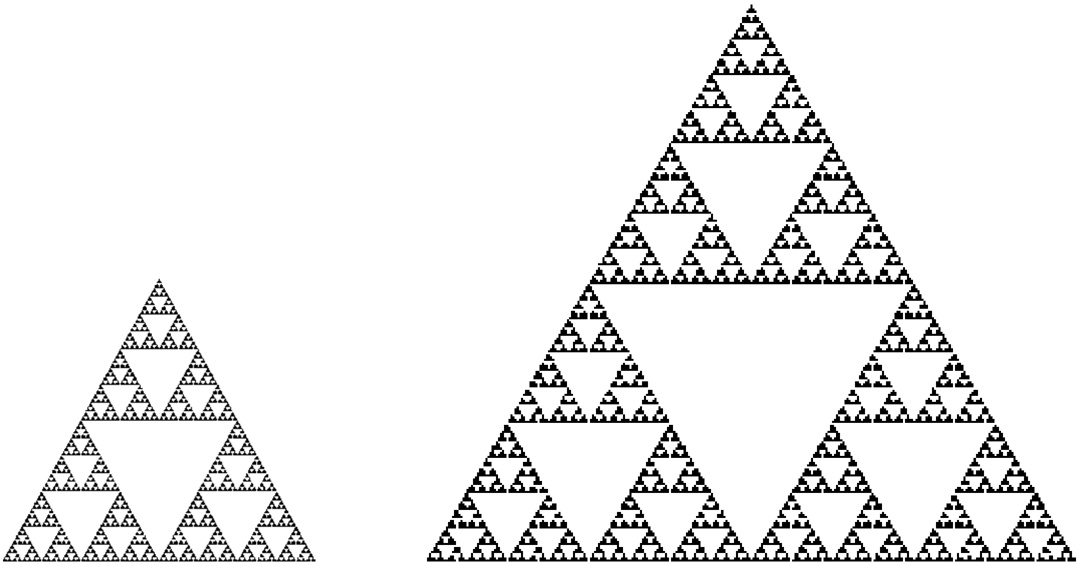
2. α. Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τον αριθμό των ίδιων κομματιών που βρήκες να δημιουργούνται και στη δεύτερη στήλη γράψε τον σε μορφή δύναμης, συμπληρώνοντας τον εκθέτη που λείπει.

ΣΧΗΜΑ	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ**	**Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΔΥΝΑΜΗΣ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΟΠΩΣ ΤΙΣ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**
Ευθεία		$2^{\square}$	1 (Μήκος)
Τετράγωνο		$2^{\square}$	2 (Μήκος και πλάτος)
Κύβος		$2^{\square}$	3 (Μήκος και πλάτος και ύψος)

Πίνακας 1

β. Τι διαπιστώνεις για τη σχέση εκθέτη και αριθμού των διαστάσεων;

3. Στο παρακάτω σχήμα το αριστερό τρίγωνο με πλευρά β δεν είναι παρά το κάτω αριστερά τρίγωνο του δεξιού τριγώνου που σχηματίζεται κατά τη διαδικασία δημιουργίας του τριγώνου Sierpinski. Το μήκος της πλευράς του τριγώνου στα δεξιά είναι πάλι διπλάσιο από το μήκος του τριγώνου στα αριστερά.



β 2β

Σχήμα 1.

α. Πόσα τρίγωνα ίδια με το αριστερό τρίγωνο έχουμε τώρα στο εσωτερικό του δεξιού τρίγωνου;

Μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά:

Με διπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά στο εσωτερικό 3 ίδια τρίγωνα.

Στον Πίνακα 2 χρησιμοποιούμε τον γνωστό από τα μαθηματικά σου λόγο ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων.

ΣΧΗΜΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ	ΛΟΓΟΣ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ
Ευθ. τμήμα	2	$2 = \left(\frac{2}{1}\right)^1$	1
Τρίγωνο Sierpinski	3	$3 = \left(\frac{2}{1}\right)^{\chi}$	
Τετράγωνο	4	$4 = \left(\frac{2}{1}\right)^2$	2
Κύβος	8	$8 = \left(\frac{2}{1}\right)^3$	3

Πίνακας 2.

Στο νέο φύλλο βλέπεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \left(\frac{2}{1}\right)^{\chi}$.

Συμπλήρωσε στον οριζόντιο άξονα το χ του Πίνακα 2.

α. Τι διαπιστώνεις;

β. Ποιος αριθμός νομίζεις ότι είναι το χ στον εκθέτη της γραμμής που αντιστοιχεί στο τρίγωνο Sierpinski στον Πίνακα 2;

$\chi =$

γ. Ποιος νομίζεις ότι είναι ο αριθμός των διαστάσεων που αντιστοιχεί στο τρίγωνο Sierpinski;

δ. Αυτό που ισχύει για το ευθύγραμμο τμήμα, το τετράγωνο και τον κύβο, δηλαδή ότι ο αριθμός των διαστάσεών τους είναι ίσος με τον εκθέτη του λόγου αυτοομοιότητας, ισχύει και για το τρίγωνο Sierpinski. Επομένως, ο αριθμός των διαστάσεων του τριγώνου Sierpinski είναι ίσος με τον αριθμό χ που βρήκες. Τι νομίζεις ότι σημαίνει ότι ο αριθμός των διαστάσεων είναι δεκαδικός;

ε. Γιατί στον Πίνακα 2 αναγράφεται λόγος «αυτοομοιότητας»;

ΙΙ. Διάσταση αυτοομοιότητας.

1. Είδαμε ότι η διάσταση του τριγώνου* Sierpinski *είναι ο εκθέτης χ στην παρακάτω *εξίσωση της διάστασης αυτοομοιότητας*

$$2^{\chi} = 3 \qquad (1)$$

η λύση της οποίας βρίσκεται μεταξύ 1 και 2:

$$\mathbf{1 < \chi < 2}$$

Για να υπολογίσουμε με ακρίβεια τον χ μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία με τον υπολογιστή τσέπης:

α. Πάτησε το 2.

β. Πάτησε το $\mathbf{x^y}$, *που δίνει με τον τρόπο αυτό τη συνάρτηση* $\mathbf{2^x}$.

γ. Δώσε σαν εκθέτη έναν δεκαδικό αριθμό με όσα ψηφία θέλεις.

δ. Σημείωσε τον δεκαδικό στον παρακάτω πίνακα στη θέση του ***χ*** *και πάτησε το ίσον. Σημείωσε το αποτέλεσμα στην κάτω γραμμή του πίνακα.*

	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η	9η	10η
Σημείωσα χ =										
Βρήκα 2^{χ} =										

Πίνακας 3.

ε. Κράτησε μόνο τα αποτελέσματα που πλησιάζουν αρκετά το 3, (όταν παράδειγμα είναι $2{,}9 < 2^{\chi} < 3{,}1$*) και διέγραψε τα υπόλοιπα.*

στ. Υπολόγισε τον μέσο όρο των χ που κράτησες.

1. α. Ποιο είναι το αποτέλεσμα που βρήκες;

2. Θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τη διάσταση αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski;

3. Τι είδους αριθμός είναι το χ; Γνωρίζεις και άλλους αριθμούς με αυτή την ιδιότητα;

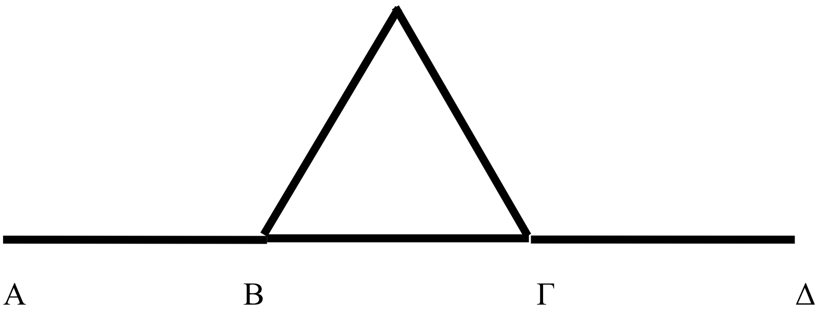
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Ε.

Ι. Γραμμή von Koch.

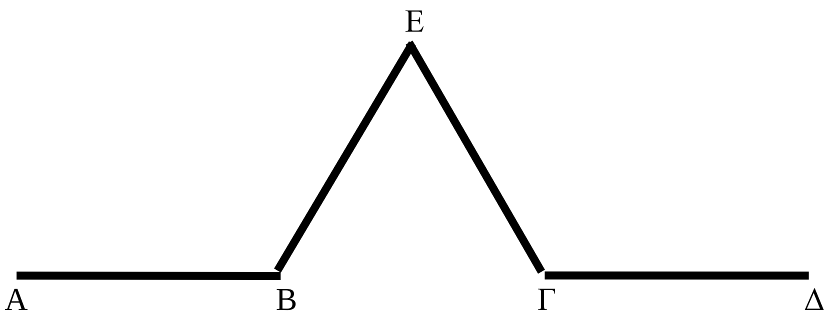
Θα δημιουργήσουμε τώρα ένα άλλο σχήμα.

Στην παρακάτω γραμμή ΑΔ βλέπουμε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.

Με βάση το τμήμα ΒΓ σχηματίζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο όπως παρακάτω.



Αφαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

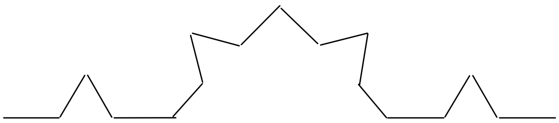


Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.
Δηλαδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα το χωρίζουμε σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα, με βάση το μεσαίο τμήμα σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο και αφαιρούμε τη βάση…κ.ο.κ. Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται γεννήτρια της γραμμής von Koch.

1. Σχεδίασε τις δυο επόμενες επαναλήψεις.

Διάσταση αυτοομοιότητας γραμμής von Koch

β



3β

Μελέτησε πάλι τη γεννήτρια της γραμμής von Koch, όπου το μήκος της γραμμής δεξιά είναι τριπλάσιο του μήκους της γραμμής αριστερά και θυμήσου πως σχηματίσαμε την εξίσωση (1) της διάστασης αυτοομοιότητας του τριγώνου Sierpinski:

Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά 4 ίδια τμήματα.

2. Σχημάτισε με τον τρόπο αυτόν την εξίσωση της διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής von Koch:

3.Υπολόγισε κατά προσέγγιση τον χ με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης.

$\chi =$

II. Γραμμή Cantor.

Την παρακάτω γραμμή την χωρίζουμε σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα και αριθμούμε το κάθε ευθύγραμμο τμήμα αρχίζοντας από το **0**.

Αφαιρούμε το μεσαίο ευθύγραμμο τμήμα.

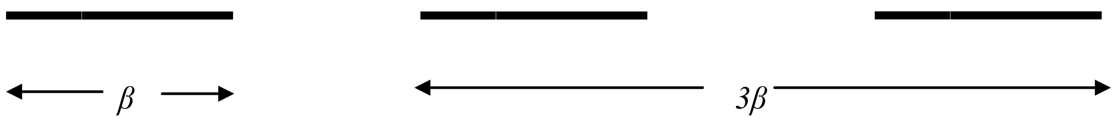
Και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται.

1. Σχεδίασε τις δυο επόμενες επαναλήψεις αριθμώντας τα ευθύγραμμα τμήματα από την αρχή με τον ίδιο τρόπο.

2. Πόσες φορές μπορεί να συνεχιστεί η παραπάνω διαδικασία;

3. Τι θα απέμενε τελικά ;

4. Σχημάτισε την εξίσωση της διάστασης αυτοομοιότητας της γραμμής Cantor με συλλογισμό ανάλογο με εκείνο που κάναμε στο τρίγωνο Sierpinski και στη γραμμή von Koch:



Με τριπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχηματίστηκαν τελικά 2 ίδια τμήματα, επομένως

$$\boldsymbol{3^{\chi} = 2.}$$

6. Με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης υπολόγισε τη διάσταση αυτοομοιότητας της γραμμής Cantor.

$\chi =$

7. Διαφέρει το αποτέλεσμά σου από τις διαστάσεις των άλλων κλασματοειδών σχημάτων; Γιατί νομίζεις ότι συμβαίνει αυτό;

III. Ταξινόμηση.

Τοποθέτησε στον επόμενο πίνακα τις διαστάσεις αυτοομοιότητας των παρακάτω σχημάτων.

Ευθύγραμμο τμήμα, σημείο, τρίγωνο, τρίγωνο Sierpnski, γραμμή von Koch, τετράγωνο, κύκλος, σφαίρα, γραμμή Cantor, κύβος, κώνος, σφουγγάρι Menger.

ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	***ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΑΥΤΟΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ***						
		$\chi=0$	$0<\chi<1$	$\chi=1$	$1<\chi<2$	$\chi=2$	$2<\chi<3$	$\chi=3$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ασημόπουλος Στ., Σταύρου Δ. & Σκορδούλης Κ. (2009). Εκπαιδεύοντας Φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. σε σύγχρονες Θεωρίες της Φυσικής. *Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτικής των Φυσικών επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση - Οι πολλαπλές προσεγγίσεις της διδασκαλίας και της μάθησης των Φυσικών Επιστημών*, σελ. 216 – 223.

Adams, T.L. and Aslan-Tutak, F. (2006). Serving up sierpinski! *Mathematics Teaching in The Middle School*, *11*(5), 248-251.

Ault, C. R. (1983). Structured Interviews and Children's Science Conceptions.

Hoosier Science Teacher, 9 (2): p. 45-53.

Barnsley, M. F. (1993). *Fractals Everywhere*, Academic Press Professional.

Βισκαδουράκης, Β., Σουγιούλ Αλ. (1998) - *Ιστορικά Στοιχεία στην Fractal Γεωμετρία και μια Διδακτική Πρόταση.* ΠΜΣ Διδακτικής Παν. Αθηνών

Behr, R. (1994). Fraktale und Chaos-Über die Vermittelbarkeit in der Schule *Computer und Unterricht 14*, 4-8.

Bronstein, I. N. and Semendjajew, K. A. 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. Nauka / Teubner.

Cobb, P., Yackel, E. Wood, T. (1992) Interaction and learning in Mathematics classroom situations, *Educational Studies in Mathematics, 23,* 99-122.

Cohen, L. Manion, L. (1997). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*, Εκδόσεις Μεταίχμιο.

Γούναρης, Β. (2003). *Εισαγωγή στοιχείων κλασματοειδούς γεωμετρίας στην ΣΤ δημοτικού,* Π.Τ.Δ.Ε., Α.Π.Θ.

Γούναρης, Β. (2005). Σχεδιασμός και ανάλυση διδακτικής παρέμβασης εισαγωγής στη κλασματοειδή (fractal) γεωμετρία στη ΣΤ' τάξη του Δημοτικού, *στα Πρακτικά του 1ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*, Αθήνα 9-12.

Γούναρης, Β. (2011). Το παιχνίδι του χάους και το τρίγωνο Sierpinski στο μάθημα των μαθηματικών στην γ΄ γυμνασίου, *στα Πρακτικά του 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*, Ιωάννινα 1-12.

Dane R. Camp. A (1991). Fractal Excursion. *Mathematics teacher* V.84 N. 4

Devaney, R.L. (1986). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. W. H. Benjamin

Devaney, R.L. (1990). *Chaos, Fractals, and Dynamics. Computer experiments in Mathematics,* Addison-Wesley Publishing Company.

Devaney, R. L. (2003). *An introduction to Chaotic Dynamical Systems.* (New edition). Westview Press.

Driver R. (1985). *Young People's Images Of Science*. Open University Press

Driver R. et al (1998). *Οικο-δομώντας τις έννοιες των Φυσικών Επιστημών*. Μετάφραση Χατζή Μ. Δαρδανός

Duit, R., Komorek, M. (1997). Understanding the basic ideas of chaos-theory in a study of limited predictability, *International Journal of Science Education, 19*, 247-264.

Duit, R. (2001). Educational Reconstraction: Science Subject Matter and Educational Issues in Harmony-Research and Development Intimately Linked. In*: Proceedings of the Third International Conference on Science Education Research in the Knowledge Based Society*, Thessaloniki Greece, (1), 227-229.

Δάλλα Λ., Δρακόπουλος Β., Boehm A. (1995). Στοιχεία από τη θεωρία των Fractals, *Μαθηματική Επιθεώρηση* 43, 21-48.

Δρακόπουλος Β., Δάλλα Λ., (1997). Η νέα διάσταση της εκπαιδευτικής μαθηματικής σκέψης, *14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, Ε.Μ.Ε. 235-243.

Falconer, Kenneth (2003). *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley

Fischbein, E. Tirosh, D Hess, P.(1979). The Intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics* 10,3-40

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29-44

Gleick, J. (with Eliot Porter) 1990. *Nature's Chaos*, Viking Penguin.

Gouyet, J-F. 1996, *Physics and Fractal Structures*. Hardcover, Manchester University Press.

Glaser, B. G., Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine Press

Glaser, B.G. (1992). *Basics of grounded theory analysis*. Mill Valley, CA: Sociology Press

Glasersfeld, E. 1987. Learning as a constructive activity, *in Problems of representation in teaching and learning of mathematics* C. Janver (ed.), London: Lawrence Erlbaum, pp.71-81

Glaserfeld, E. von (1988). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Reidel

Goldenberg, P. (1999) Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* Volume 4, pp 191-224.

Guitierrez, R. Ogborn, J. (1992). A casual for analysing alternative conceptions. *International Journal of Science Education* 14, S.201-220.

Hartmut, J. Peitgen, H.O. Saupe, D. (1989). Fraktale - eine neue Sprache für komplexe Strukturen in: *Spektrum der Wissenschaft* 9/1989, S. 52ff.

Hideki Takayasu, 1990. *Fractals in Physical Science.* Hardcover, Manchester University Press.

Hynd, C.R., McNish M, M (2001). *Learning Counterintuitive Physics Concepts: The Effects of Text and Educational Environment*. University of Georgia

Johnson, R. T., Johnson, D. W. (1990). *Using cooperative learning in math*, in Cooperative Learning in Math, Neil Davidson (ed.).

Johnson, B., Christensen, L. (2008). *Educational research: Quantative, qualitative and mixed approaches*. Sage Publications.

Karakuş, F. (2015). Investigation into how 8th Grade Students Define Fractals. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 15(3) 825-836. Doi: 10.12738/estp.2015.3.2429

Katu, N., Lunetta, V.N., van den Berg, E. (1993). Teaching Experiment Methodology in the Study of Electricity Concepts in *The Proceedings of the Third International Seminar on Misconceptions and Education Strategies in Science and Mathematics*. Misconceptions Trust: Ithaca, NY.

Kaye, B. H. (1994). *A Random Walk Through Fractal Dimensions*. Weinheim Verlagsgesellschaft VCH.

Κεΐσογλου Σ. Σπύρου Π. (2003). Η Μαθηματικοποίηση της Μορφής το Παράδειγμα της Ομοιότητας των Ορθογωνίων Τρίγωνων. *2ο Συνέδριο* *για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Μαθηματικό τμήμα Παν. Αθηνών - Παν. Κύπρου

Komorek, M. (1997) *Elementarisierung und Lernprozesse im Bereich des deterministischen Chaos*. PhD Thesis. IPN Kiel Germany.

Komorek, M., Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems, *International Journal of Science Education 26 (5)*, 619-633.

Komorek M, et al (1998) *Learning Studies in the field of Fractals* IPN Univ. Kiel.

Komorek, M., Duit, R., Bucker, N. and Naujack, B. (2001). Learning process studies in the field of fractals, *in Research in science education* – past, present, and future. Netherlands: Kluwer Academic Publ. pp.95-100.

Lewis, A. (1992). Group child interviews as a research tool. *British Educational Research Journal*, 18(4) 413-421.

Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman W. H. and Company.

Mandelbrot B. B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* 156, , 636-638

Monaghan, J: (1986) Adplescents Understanding of Limits and Infinity, Unpublished PhD thesis, University of Warwick, UK, *Educational Studies in Mathematics, 12, 491–512*

Madison, D. S. (2005). *Critical ethnography: Method, ethics, and performance*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications

Marny F., Sylvia L. (1991). The Mandelbrot Set in the Classroom, *in Mathematics teacher*, 84, n. 3

Μπακόπουλος Γ., (2000). *Fractals παντού και πάντα*, ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος, Αριάδνη.

Μπούντης, Τ. (1997). *Μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.* Εκδοσεις Πνευματικού.

Nemirovsky, R. (1993). Students making sense of chaotic behaviour, *in Interactive learning environments 3*, 151-175.

Nesbitt, Vacc., N. (1992). Fractal Geometry in Elementary School Mathematics. *Journal of mathematical behavior* 11, 279-295.

Nonnenmacher T.F. (1996). *Mathematische Methoden der Theoretischen Physik*. Vorlesungen, Universität Ulm.

Ορφανίδου, Μ. (1999). *Τα Fractals στην Εκπαίδευση*. "ΠΜΣ Διδακτικής Παν. Αθηνών

Πατσιομίτου Στ., Κυνηγός Χ., (2005). *Τα fractals ως πλαίσιο κατανόησης ακολουθίας και ορίων μέσω της έννοιας του εμβαδού σε περιβάλλον βασισμένο στο δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων*. Μεταπτυχιακό τμ. Διδακτική και Μεθοδολογία Μαθηματικών, παν. Αθηνών.

Pandit N. R. (1996) The Creation of Theory. In *The Qualitative Report* Vol 2 Nr 4

Paula V. Engelhardt, N. Sanjay Rebello, Edgar G. Corpuz and Darryl J. Ozimek, Contributed Poster (2003). The Teaching Experiment - What it is and what it isn't. *Physics Education Research Conference*, August 6-7, 2003, Madison, WI.

Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L., (1992a) *Fractals for the Classroom, Part 1: Introduction to Fractals and Chaos*, Springer Verlag.

Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D. (1992b). *Fractals for the Classroom, Part 2: Complex Systems and Mandelbrot Set*, Springer Verlag.

Peitgen H.O. et al. (1994). *Chaos, Bausteine der Ordnung*. Klett-Cotta

Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L. (1999). *Fractals for the Classroom: Strategic Activities*. Berlin: Springer Verlag.

Peitgen, H. O., Richter, P. H. (1986). *The Beauty of Fractals*. Springer.

Peitgen, H. O. (2000). Chaos & Fractals: New Frontiers of Science. Hardcover

Piaget, J. Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*. W. W. Norton & Company

Reineker, P. (2001). *Theoretische Physik.* Vorlesungen, Universität Ulm.

Sandefur. J. T. (1996). Using Self-Similarity to Find Length, Area, and Dimension. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 103, No. 2

Schröder, M. (1991). *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit*. Spektrum.

Scott, P., Asoko, H., Driver, R. (1992). Teaching for conceptual change: A review of strategies, *in Research in Physics learning: Theoretical issues and empirical studies*, R. Duit, F. Goldberg H. Niedderer (eds) Kiel: IPN, pp. 310-329

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on a number line – Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477-488

Σπηλιοπούλου, Χ., 2004. *Αντιλήψεις μαθητών για το άπειρο*. Διπλωματική εργασία προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στη διδακτική και μεθοδολογία των μαθηματικών. Τμήμα Φ.Π.Ψ. παν Αθηνών

Skordoulis, C., Tolias, V., Stavrou, D. (2005). Teaching Chaos with a Pendulum to Greek Secondary School Students. *In: Matthews M.R. (ed.), Second International Pendulum Conference, 249-258*. University of New South Wales.

Spector, B.A. Gibson, C.W. (1991). A qualitative study of middle school students' perceptions of factors facilitating the learning of science: Grounded theory and existing theory. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(6), 467-484.

Σταύρου Δ. (2004). *Η αλληλεπίδραση τυχαίου και νομοτέλειας στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Διδακτική ανάλυση και διαδικασίες μάθησης,* Πανεπιστήμιο του Κιέλου, Γερμανία

Σταύρου Δ. (2013). Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα στη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών (Nonlinear Systems in Science Teaching). Themes in Science & Technology Education, 6(1-2), 49-66.

Σταύρου, Δ., Komorek, M. Duit, R (2002). *Ντετερμινισμός και τυχαιότητα στη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων*. IPN - Πανεπιστήμο του Κιέλου, Γερμανία

Stavrou, D., Komorek, M., Duit, R. (2005*)*. Didaktische Rekonstruktion des Zusammenspiels von Zufall und Gesetzmäßigkeit in der nichtlinearen Dynamik. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften (ZfDN), 11*, 147-164.

Stavrou, D. & Duit, R. (2014). Teaching and Learning the Interplay Between Chance and Determinism in Nonlinear Systems. International Journal of Science Education, 36, 3, 506-530.

Stavrou, D., Duit, R. & Komorek, M. (2008). A teaching and learning sequence about the interplay of chance and determinism in non-linear systems. Physics Education 43, (4), 417 – 422.

Stavrou, D., Assimopoulos, S. & Skordoulis, C. (2013). A unit on deterministic chaos for student teachers. Physics Education, 48, (3), 355-359.

Σταυρίδου, Ε. (2000). *Συνεργατική μάθηση στις Φυσικές Επιστήμες*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Θεσσαλίας.

Stauffer, D. Stanley, H.E. (1996). *From Newton to Mandelbrot*. Springer Verlag.

Steffe, L. P., (1983).The Teaching Experiment Methodology in a Constructivist Research Program, *in Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollack, and M. Suydam, Editors., Birkhäuser: Boston, Massachusetts.

Steffe, L. P., D'Ambrosio, B. (1996) Using teaching experiments to understand students' mathematics. In D. Treagust, R. Duit and B. Fraser (eds), *Improving teaching and learning in science and mathematics,* (New York: Teacher College Press), 65-76.

Steffe, L. P. Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements *in Research design in mathematics and science education.* R. Lesh and A. E. Kelly, Editors., Erlbaum: Hillsdale, NJ, p. 267-307.

Strauss, A.L., Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. In N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks, CA: Sage

Toluk, Z., Middleton, J. A. (2003). *The Development of Children's Understanding of the Quotient: A teaching experiment*. Arizona State University United States

Vollrath H. J. (1977), The understanding of similarity and shape in classifying tasks. *Education studies in Mathematics* 8 , p 211- 224.

Watts, M. and Ebutt, D. (1987). More than the sum of the parts: research methods in group interviewing. *British Educational Research Journal*, 13 (1) 25-34.

Weber, S. M. (1994). Nichtlineare Phänomene in der Schule (be-)greifbar, *Papier zur DPG-Physikschule Nichtlineare Dynamik der Fluide*. Bad Honnef.

Χατζηδημητρίου, Ι. (2010). *Ευστάθεια σημείων ισορροπίας δυναμικών συστημάτων*. Τμήμα φυσικής ΑΠΘ.

Χαλκιά, Κ. (2005). Η *ελευθερία της μέτρησης και η πειθαρχία της διαίσθησης. Σχέσεις διαλόγου μεταξύ ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας στην εκπαίδευση στις φυσικές επιστήμες*. Π.Τ.Δ.Ε παν/μίου Αθηνών.

Χατζηκυριάκου, Κ. (2004). Ιχνηλατώντας τρεις εποχές του σχήματος στα σχολικά μαθηματικά. *Στα πρακτικά 3ου διήμερου διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη.

Χατζηπαντελής, Θ. (1998). *Στατιστική στην εκπαίδευση.* Π.Τ.Δ.Ε του Α.Π.Θ. Θεσσαλονίκη.

Χρηστίδης, Θ. (1997). *Χάος και πιθανολογική αιτιότητα: Μεταξύ προκαθορισμού και τύχης*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Βάνιας.

Χρονάκη, Α. 2010. Το Διδακτικό Πείραμα: Η ποιοτική μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης. *Ποιοτική Έρευνα στην Ψυχολογία και στην Εκπαίδευση: Επιστημολογικά, μεθοδολογικά και ηθικά ζητήματα* σελ. 605-628.

Chronaki Anna, (2009). 'Mathematics, Technologies, Education: The gender perspective'. University of Thessaly Press. (175 pages) ISBN – 978-960-8029-88-0

Ψύλλος, Δ. (2000). *Όψεις της έρευνας και ανάπτυξης στη Διδακτική των Φυσ. Επιστ*. Π.Τ.Δ.Ε. του Α.Π.Θ. Θεσσαλονίκη 2000.

Zeitler, H., Neidhardt, W. (1994). *Fraktale und Chaos: Eine Einführung*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Zazkis, R. Sirotic, N. (2004). MAKING SENSE OF IRRATIONAL NUMBERS: FOCUSING ON REPRESENTATION. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 4 pp 497–504.

Ιστοσελίδες:

http://www.britannica.com/biography/Hermann-Weyl

https://el.wikipedia.org/wiki/Φαινόμενο_της_πεταλούδας

http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Outline.html

http://members.aol.com/dspontike/fractal, Fractalmusic.

https://www.youtube.com/watch?v=6VZq7EurckI&list=RDRcIrc9aE7Vs &index=5

https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE

http://math.rice.edu/~lanius/fractals/dim.html.

http://www.clausewitz.com/Flash/FLVs/ROMP-MP4BS.htm

http://www.jgiesen.de/ChaosSpiel/Chaos.html

http://digitalschool.minedu.gov.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-C104/68/542,2184